ทฤษฎีบทของโรลล์สำหรับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ช่อทิพย์ บัวบาน
พิมลพรรณ ศรีนารอด

การศึกษาอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2559

มหาวิทยาลัยพะเยา

ทฤษฎีบทของโรลล์สำหรับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ช่อทิพย์ บัวบาน
พิมลพรรณ ศรีนารอด

การศึกษาอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2559

มหาวิทยาลัยพะเยา

คณะกรรมการสอบการศึกษาอิสระ อาจารย์ที่ปรึกษา และคณบดีคณะวิทยาศาสตร์ ได้พิจารณาการศึกษาเรื่อง "ทฤษฎีบทของโรลล์สำหรับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน" เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยพะเยา

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กมลรัตน์ แนมมณี)

ประธานกรรมการ

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรรณิการ์ ขำพึ่งสน)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

....

(นางสาวศิริลักษณ์ เผ่ากันทะ)

กรรมการ

....

(รองศาสตราจารย์ปรียานันท์ แสนโภชน์)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

ธันวาคม 2559

คณะกรรมการสอบการศึกษาอิสระ อาจารย์ที่ปรึกษา และคณบดีคณะวิทยาศาสตร์ ได้พิจารณาการศึกษาเรื่อง "ทฤษฎีบทของโรลล์สำหรับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน" เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยพะเยา

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กมลรัตน์ แนมมณี)

ประธานกรรมการ

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรรณิการ์ ขำพึ่งสน)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

....

(นางสาวศิริลักษณ์ เผ่ากันทะ)

กรรมการ

....

(รองศาสตราจารย์ปรียานันท์ แสนโภชน์)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

ธันวาคม 2559

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาอิสระฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีเพราะได้รับคำแนะนำ และการช่วยเหลือเป็นอย่างดีจากท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรรณิการ์ ขำพึ่งสน อาจารย์ที่ปรึกษาที่คอยดูแลและให้คำแนะนำ ตรวจสอบ แก้ไขปัญหาและข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งมาตลอด ผู้วิจัยตระหนักถึงความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์ และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบคุณอาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่าน ที่ได้ให้ความรู้และคอยให้คำแนะนำ อบรมสั่งสอน ดูแล เอาใจใส่ด้วยดีตลอดมา

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ญาติพี่น้องทุกท่านที่ได้สนับสนุน และให้กำลังใจอย่างดีเสมอมา

ขอขอบคุณเพื่อนๆ นิสิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์คู่ขนานทุกคน สำหรับความช่วยเหลือต่างๆ และคอยให้กำลังใจกันตลอดมา

ช่อทิพย์ บัวบาน
พิมลพรรณ ศรีนารอด

ชื่อเรื่อง ทฤษฎีบทของโรลล์สำหรับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ผู้ศึกษาค้นคว้า นางสาวช่อทิพย์ บัวบาน

นางสาวพิมลพรรณ ศรีนารอด

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรรณิการ์ ขำพึ่งสน

วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คำสำคัญ ทฤษฎีบทของโรลล์ พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน รากของพหุนาม

บทคัดย่อ

ในการศึกษาอิสระครั้งนี้ได้ศึกษาทฤษฎีบทของโรลล์สำหรับพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยเป็นงานวิจัยของ Luis H. Gallardo โดยพหุนามที่ศึกษาถูกกำหนดให้อยู่ในรูปแบบ $P(z) = (z^2 - 1/4)\, R(z)$ เมื่อ $R(z)$ คือพหุนามโมนิค แบ่งการศึกษาออกเป็น 3 กรณี คือ

(1) กรณีที่ $P(z)$ มีดีกรีเท่ากับ d

(2) กรณีที่ $P(z)$ มีรากอย่างมากที่สุด 3 รากที่แตกต่างกัน

(3) กรณีดีกรี d มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4

นอกจากนี้ในงานวิจัยยังแสดงว่าจะมีรากอย่างน้อย 1 รากของอนุพันธ์ P' อยู่ในเซต S เมื่อ $S = \{z \in C : -1/2 < R(z) < 1/2\}$

Title	ON ROLLE'S THEOREM FOR POLYNOMIALS OVER THE COMPLEX NUMBERS
Author	Miss Chorthip Buaban Miss Phimonpan Srenarod
Advisor	Assist. Prof. Dr. Kannikan Khompurngson
Bachelor of Science	Program in Mathematics
Keywords	Rolle's Theorem, Polynomial with complex coefficients Root of polynomial

ABSTRACT

We study Rolle's Theorem for polynomial with complex coefficient which is considered by Luis H. Gallardo. Let $P\left(z\right) = \left(z^2 - 1/4\right) R\left(z\right)$ when $P\left(z\right)$ is some monic polynomial. The results in the following case:

(i) $P(z)$ the degree of d

(ii) $P\left(z\right)$ has at most 3 different roots and

(iii) $\deg\left(P\left(z\right)\right) \leq 4$

Moreover, they will search for roots of the derivative P' in the region $S = \{z \in C : -1/2 < R\left(z\right) < 1/2\}$.

บทที่ 1
บทนำและความรู้พื้นฐาน

1.1 บทนำ

ไมเคิล โรลล์ (Michel Rolle : 1652-1719) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ผู้นำเสนอทฤษฎีบทของโรลล์ โดยได้มีใจความว่า ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a, b) ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ อย่างน้อยหนึ่งค่า ที่ $f'(c) = 0$ โดยที่เราจะนำเอาทฤษฎีบทนี้มาประยุกต์ในการหาค่ารากของอนุพันธ์ที่อยู่ระหว่าง (a, b) ซึ่งเราศึกษาในกรณีที่พหุนามมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

Luis H. Gallardo ได้ศึกษาพหุนามซึ่งกำหนดรูปแบบของพหุนามไว้คือ

$$P(z) = (z^2 - 1/4) R(z)$$

เมื่อ $R(z)$ คือ พหุนามโมนิค และศึกษาตามกรณีดังต่อไปนี้

(1) กรณีที่$P(z)$ มีดีกรีเท่ากับ d

(2) กรณีที่ $P(z)$ มีรากอย่างมากที่สุด 3 รากที่แตกต่างกัน

(3) กรณีดีกรี d มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4

นอกจากนี้ยังแสดงว่าจะมีรากอย่างน้อย 1 ราก ของอนุพันธ์ P' อยู่ในเซต S เมื่อ

$$S = \{z \in C : -1/2 < R(z) < 1/2\}$$

ในการศึกษาอิสระในครั้งนี้ เราได้แบ่งการศึกษาทั้งหมดออกเป็น 2 บท ดังต่อไปนี้ บทที่ 1 บทนำและความรู้พื้นฐาน ซึ่งในส่วนของความรู้พื้นฐานเราจะแบ่งออกเป็น 2 หัวข้อ คือ รากของพหุนามและรากของพหุนามของจำนวนเชิงซ้อน และในบทที่ 2 คือทฤษฎีบทหลัก ซึ่งแบ่งย่อยออกเป็น 3 หัวข้อ คือ (1) กรณีที่$P(z)$ มีดีกรีเท่ากับ d (2) กรณีที่ $P(z)$ มีรากอย่างมากที่สุด 3 รากที่แตกต่างกัน และ (3) กรณีดีกรี d มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4

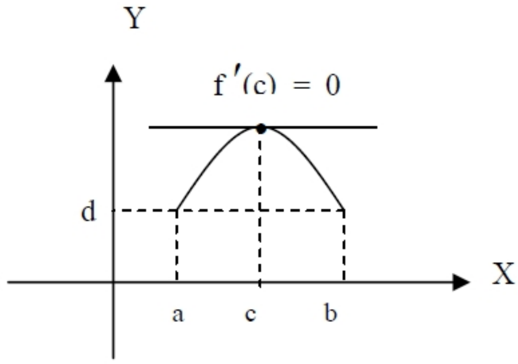
1.2 ความรู้พื้นฐาน

สำหรับหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานต่างๆที่จำเป็นในการศึกษาในการศึกษาอิสระครั้งนี้

1.2.1 รากของพหุนาม

ทฤษฎีบท 1.2.1.1 [3] **ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem)**

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) ถ้า $f(a)=f(b)$ แล้วจะมี $c\in(a,b)$ ที่ $f'(c)=0$



รูปภาพที่ 1.2.1.1 ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem)

กำหนดฟิลด์ F ให้ $F[x]=\{a_0+a_1x+...+a_nx^n : a_i\in F; n\in\mathbb{Z}^+\}$ เรียกสมาชิกของ $F[x]$ ว่า พหุนามใน x

บทนิยาม 1.2.1.2 [2] กำหนด $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$
และ $q(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m$
เป็นสมาชิกของ $F[x]$ แล้ว $p(x)=q(x)$ ก็ต่อเมื่อ $a_i=b_i \quad ,\forall i\geq 0$

บทนิยาม 1.2.1.3 [2] กำหนด $p(x)$ และ $q(x)$ เหมือนในบทนิยาม 1.2.1.2 นิยามการบวกและการคูณดังนี้

1. $p(x)+q(x)=c_0+c_1x+...+c_rx^r$ โดยที่ $c_i=a_i+b_i$, $\forall i\geq 0$
2. $p(x)q(x) \quad =c_0+c_1x+...+c_tx^t$ โดยที่ $c_i=a_ib_0+a_{i-1}b_1+...+a_0b_i$, $\forall i\geq 0$

บทนิยาม 1.2.1.4 [2] ถ้า $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ และ $a_n \neq 0$ เราจะกล่าวว่า $f(x)$ *มีดีกรี n (degree n)* เขียน $\deg f(x)$ แทนดีกรีของ $f(x)$ ถ้า $\deg f(x) = 0$ เรียก $f(x)$ ว่าพหุนามคงที่ โปรดสังเกตว่าเราไม่นิยามดีกรีของ $f(x) = 0$ (เรียก $f(x) = 0$ *ว่าพหุนามศูนย์*)

ทฤษฎีบท 1.2.1.5 [2] ถ้า $f(x) \neq 0$ และ $g(x) \neq 0$ เป็นสมาชิกของ $F[x]$ จะได้ว่า

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

ทฤษฎีบท 1.2.1.6 [2] ถ้า $f(x) \neq 0$ และ $g(x) \neq 0$ เป็นสมาชิกของ $F[x]$ จะได้ว่า

$$\deg f(x) \leq \deg(f(x)g(x))$$

ทฤษฎีบท 1.2.1.7 [2] **[The Division Algorithm]**

กำหนด $f(x)$ และ $g(x) \neq 0$ เป็นสมาชิกของ $F[x]$ จะมี $t(x)$ และ $r(x)$ ใน $F[x]$ ซึ่ง $f(x) = t(x)g(x) + r(x)$ โดยที่ $r(x) = 0$ หรือ $\deg r(x) < \deg g(x)$

บทนิยาม 1.2.1.8 [2] กำหนด $p(x) \neq 0 \in F[x]$ จะเรียก $p(x)$ ว่า *อีรีดิวซิเบิ้ลโพลีโนเมียลโอเวอร์ F (irreducible polynomial over F)*

ถ้า $p(x) = a(x)b(x)$ โดยที่ $a(x), b(x) \in F[x]$ จะได้ว่า $\deg a(x) = 0$ หรือ $\deg b(x) = 0$

ถ้า $p(x) \neq 0$ และ $p(x)$ ไม่เป็นอีรีดิวซิเบิ้ลโพลีโนเมียล เรียก $p(x)$ ว่า *รีดิวซิเบิ้ลโพลีโนเมียล* (reducible polynomial)

บทนิยาม 1.2.1.9 [2] กำหนดฟิลด์ K และ F เป็นสับฟิลด์ของ K เรียก K ว่า *เอกซ์เตนชันของ K (extension of K)* หรือ K *เป็นเอกซ์เตนชันฟิลด์ของ F (K is an extension field of F)*

ตัวอย่าง R เป็นเอกซ์เตนชันของ Q และ C เป็นเอกซ์เตนชันของ R

ทฤษฎีบท 1.2.1.10 [2] กำหนด $f(x) \in F[x]$ และ $a \in K$ ซึ่งเป็นเอกซ์เตนชันของ F เรียก a ว่าเป็นรากของ $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $f(a) = 0$

ทฤษฎีบท 1.2.1.11 [2] **[Remainder Theorem]**

ถ้า $f(x) \in F[x]$ และ K เป็นเอกซ์เตนชันของ F จะได้ว่า $\forall a \in K$ แล้ว $f(x) = (x-a)\,q(x) + f(a)$ โดยที่ $q(x) \in K[x]$ และ $\deg q(x) = \deg f(x) - 1$

ทฤษฎีบท 1.2.1.12 [2] กำหนด K เป็นเอกซ์เตนชันของ F และ $a \in K$ จะได้ว่า a เป็นรากของ $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $(x-a)\,|f(x)$ ใน $K[x]$

บทนิยาม 1.2.1.13 [2] กำหนด K เป็นเอกซ์เตนชันของ F และ $a \in K$ จะกล่าวว่า a *เป็นรากซ้ำ* m *ราก (root of multiplicity* m *)* $m > 1$ ของ $f(x) \in F[x]$ ก็ต่อเมื่อ $(x-a)^m\,|f(x)$ แต่ $(x-a)^{m+1}\,|f(x)$

ในกรณี $m = 1$ เราเรียก a ว่า *รากไม่ซ้ำ (simple root)*

ทฤษฎีบท 1.2.1.14 [2] กำหนด $f(x) \in F[x]$ ซึ่ง $\deg f(x) = n$ จะได้ว่า $f(x)$ มีรากอย่างมาก n รากในเอกซ์เตนชันใดๆของ F

บทนิยาม 1.2.1.15 [2] กำหนด $f(x) \in F[x]$ จะกล่าวว่า $f(x)$ *สปลิท (split) ในเอกซ์เตนชัน* E *ของ* F ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของตัวประกอบกำลังหนึ่งใน $E[x]$ นั่นคือ $f(x) = k(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ โดยที่ $k \in F$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$

ทฤษฎีบท 1.2.1.16 [2] กำหนด $f(x) \in F[x]$ สปลิทในเอกซ์เตนชัน E ของ F นั่นคือ $f(x) = k(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ ใน $E[x]$ จะได้ว่า $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ เป็นสปลิทติ้งฟิลด์ของ $f(x)$ โอเวอร์ F

ทฤษฎีบท 1.2.1.17 [2] **[Existence of Splitting Fields]**

กำหนด $f(x) \in F[x]$ จะได้ว่ามีสปลิทติ้งฟิลด์ของ $f(x)$ โอเวอร์ F เสมอ

ทฤษฎีบท 1.2.1.18 [2] กำหนด $f(x) \in F[x]$ จะได้ว่า $f(x)$ มีรากซ้ำก็ต่อเมื่อ $f(x), f'(x)$ มีตัวประกอบร่วมดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 (รากซ้ำ หมายถึง รากซ้ำ m รากเมื่อ $m > 1$)

1.2.2 รากของพหุนามของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 1.2.2.1 [1] จำนวนเชิงซ้อน z จะนิยามในรูปคู่อันดับของจำนวนจริง

$$z = (x, y)$$

เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง
x เรียกว่า **ส่วนจริง** (real part) ของ z เขียนแทนด้วย $\mathrm{Re}\ z$
y เรียกว่า **ส่วนจินตภาพ** (imaginary part) ของ z เขียนแทนด้วย $\mathrm{Im}\ z$
จำนวนเชิงซ้อน $(x, 0)$ คือ **จำนวนจริง** x
จำนวนเชิงซ้อน $(0, y)$ คือ **จำนวนจินตภาพแท้** (pure imaginary number)

บทนิยาม 1.2.2.2 [1] การบวกและการคูณกันของจำนวนเชิงซ้อน
ให้ $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$
1. $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

ทฤษฎีบท 1.2.2.3 [1] ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน และ $z_1, z_2, z_3 \in C$
1. $z_1 + z_2 \in C,\ z_1 z_2 \in C$ (คุณสมบัติปิด)
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (กฎการสลับที่)
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $\forall z \in C\ \exists z_0 \in C\ \exists z + z_0 = z = z_0 + z$
5. $\forall z \in C\ \exists (-z) \in C\ \exists z + (-z) = z_0 = (-z) + z$
6. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
7. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
8. $\forall z \in C\ \exists u \in C\ \exists u \cdot z = z = z \cdot u$
9. $\forall z \in C\, (z \neq z_0 \rightarrow \exists z^{-1} \in C \exists z \cdot z^{-1} = u = z^{-1} \cdot z)$
10. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

บทนิยาม1.2.2.4 [1] จำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ ใดๆ นิยามคู่สังยุค z (conjugate of z) คือ จำนวนเชิงซ้อน $x - iy$ เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ นั้นคือ $\bar{z} = x - iy$

คุณสมบัติของคู่สังยุค z

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
4. $\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
6. Re $z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
7. Im $z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

บทนิยาม 1.2.2.5 [1] *ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) หรือ มอดูลัส (modulus)* ของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ ใดๆ คือ $\sqrt{x^2 + y^2}$ เขียนแทนด้วย $|z|$ นั่นคือ คือ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ จะเห็นว่า $z^2 = x^2 + y^2 = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2$

คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ z

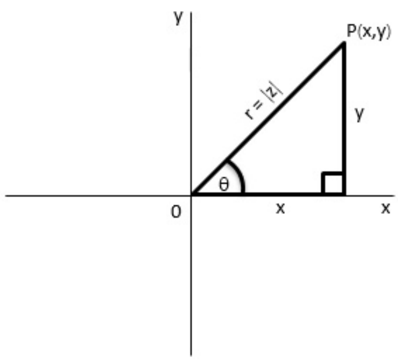
1. $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ Re$z = 0$ และ Im$z = 0$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|$
4. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
5. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
7. Re $z \le |\text{Re } z| \le |z|$ และ Im $z \le |\text{Im } z| \le |z|$
8. $|z_1 + z_2| \le z_1 + z_2$ คุณสมบัติสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality)
9. $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$
10. $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|$

บทนิยาม 1.2.2.6 [1] จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

นอกจากการเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$ ในระบบพิกัดฉากแล้วยังสามารถเขียน z ในระบบเชิงขั้ว (polar coordinates) ได้

ให้ P เป็นจุดในระนาบเชิงซ้อน แทนจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$

ให้ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ ทำกับแกน x



รูปภาพที่ 1.2.2.6 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

บทนิยาม 1.2.2.7 [1] z ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เรียกว่า *จำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว*

r คือ ค่าสัมบูรณ์ หรือ มอดูลัส (absolute value or modulus) ของ z

θ เรียกว่า อาร์กิวเมนต์ (argument) ของ z เขียนแทนด้วย $\theta = \arg z$

ถ้า $z = 0$ นั่นคือ $x = 0$ และ $y = 0$ ดังนั้น $\arg(0)$ หาค่าไม่ได้ $\arg(z)$ มีจำนวนอนันต์ และแต่ละค่าต่างกันด้วย $2n\pi$ ดังนั้น ถ้าพิจารณาเฉพาะในช่วงหนึ่งจึงนิยามค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ (principal value of arg z) ขึ้น

บทนิยาม 1.2.2.8 [1] ค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆยกเว้นศูนย์ เขียนแทนด้วย $Arg\ z$ หมายถึง ค่าของ $\arg \mathrm{z}$ เพียงค่าเดียว ซึ่ง $-\pi < \arg \mathrm{z} \leq \pi$

ทฤษฎีบท 1.2.2.9 [1] ถ้า $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วสองจำนวนใดๆ จะได้

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

ทฤษฎีบท 1.2.2.10 [1] ถ้า $z = r(\cos\theta + isin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $z^n = r^n(\cos\theta + isin\theta)$

บทนิยาม 1.2.2.11 [1] ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $w^n = z$ จะกล่าวว่า w เป็นรากที่ n ของ z

ตัวอย่าง พิจารณารากที่ 5 ของ 1

วิธีทำ ให้ $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ 1

ดังนั้น $w^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1$

แต่ $1 = \cos 0 + i\sin 0$

$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

$r^5 = 1$ และ $5\theta = 0 + 2k\pi$

$r = 1$ และ $\theta = \frac{2k\pi}{5}$

ดังนั้น $w = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, k = 01, 2, 3, 4, ...$

$k = 0, \quad w_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1, \quad w_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

$k = 2, \quad w_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

$k = 3, \quad w_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$

$k = 4, \quad w_5 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$

บทนิยาม 1.2.2.12 [1] ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์ และ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน (complex constants) ฟังก์ชัน $P(z)$

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0$$

เรียก *ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นที่* n (polynomial of degree n) โดเมนของ $P(z)$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ เมื่อ $P(z)$ และ $Q(z)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม เรียกฟังก์ชัน $f(z)$ ว่า *ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function)* และนิยามได้ทุกค่า z ยกเว้น z ทีทำให้ $Q(z) = 0$

ทฤษฎีบท 1.2.2.13 [1]

1. $\lim\limits_{z \to z_0} z = z_0$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} z^n = {z_0}^n, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
3. $\lim\limits_{z \to z_0} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน
4. $\lim\limits_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$ เมื่อ $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n, \quad (a_n \neq 0)$
5. ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ จะได้ $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0}$

ทฤษฎีบท 1.2.2.14 [1] ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ทุกๆ z ในเซต $S \subseteq C$ ดังนั้น จะได้

1. $\frac{d}{dz}\left[f(z) \pm g(z)\right] = \frac{d}{dz} f(z) \pm \frac{d}{dz} g(z)$
2. $\frac{d}{dz}\left[f(z)\, g(z)\right] = f(z) \frac{d}{dz} g(z) + g(z) \frac{d}{dz} f(z)$
3. $\frac{d}{dz}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{|g(z)|^2}$ เมื่อ $g(z) \neq 0$
4. $\frac{d}{dz}(z^n) = n z^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(z) = (3z^2 - z^{-1} + 2i)^4$ และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(3z^2 - z^{-1} + 2i\right)^4 &= 4\left(3z^2 - z^{-1} + 2i\right)^3 \frac{d}{dz}\left(3z^2 - z^{-1} + 2i\right) \\ &= 4\left(3z^2 - z^{-1} + 2i\right)^3 \left(6z - (-1)\, z^{-2}\right) \\ &= 4\left(3z^2 - z^{-1} + 2i\right)^3 \left(6z + z^{-2}\right) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.2.2.15 [1] ถ้า $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนบางย่านจุด $z_0,\ z_0 = x_0 + iy_0$ และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ z_0 จะได้ว่า

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

และจะได้

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{และ} \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0)$$

หมายเหตุ เราเรียกสมการ $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ และ $v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0)$ ว่า **สมการโคชี-รีมันน์** (Cauchy-Riemann equations) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ โคชี (A.L. Cauchy) ในปี ค.ศ. 1789-1857 และนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ รีมันน์ (G.F.B. Riemann) ในปี ค.ศ. 1826-1866 ซึ่งได้ค้นพบและได้พัฒนาทฤษฎีที่สำคัญใน

วิชาฟังก์ชันและตัวแปรเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท 1.2.2.16 [1] ถ้ามีย่านจุด z_0 คือ $N(z_0, \varepsilon)$ ซึ่ง f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกค่า z ใน $N(z_0, \varepsilon)$ จะกล่าวว่า f *เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่* z_0 *(analytic at* z_0*)*

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกๆจุดในบริเวณ R จะกล่าวว่า f *เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน* R *(analytic on* R*)*

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกๆจุดในระนาบเชิงซ้อน จะกล่าวว่า f *เป็น ฟังก์ชัน-เอนไทร์* R *(entire function)*

ตัวอย่าง $f(z) = |z|^2$ ดังได้แสดงแล้วว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $z = 0$ เท่านั้น ถ้าพิจารณาฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 0$ จะเห็นว่าไม่สามารถหาย่านจุด 0 ซึ่ง f หาอนุพันธ์ได้ทุก z ในย่าน-จุด 0 ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 0$ และจะเห็นว่าที่จุด z ใดๆก็ตาม f หาอนุพันธ์ไม่ได้ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใดๆ

ทฤษฎีบท 1.2.2.17 [1] ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_0 แล้ว f จะหาอนุพันธ์ได้ที่ z_0

บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จริง นั่นคือ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ z_0 แล้ว f อาจจะไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_0 เช่น $f(z) = |z|^2$ จะเห็นว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 แต่ f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่ 0

ให้ $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นที่ n จะได้ว่า $P(z)$ หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z นั่นคือ $P(z)$ เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

บทที่ 2
ทฤษฎีบทหลัก

ในหัวข้อนี้เราจะกำหนด

$$P\left(z\right)=\left(z^{2}-1/4\right)R\left(z\right)$$

เมื่อ $R\left(z\right)$ คือพหุนามโมนิค นั่นคือ พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ในเทอมที่มีดีกรีสูงสุดเท่ากับหนึ่ง และกำหนดให้ $n\left(z\right)=\left|z\right|^{2}=z\bar{z}$ และ $Tr\left(z\right)=z+\bar{z}$ และ $\mathrm{Re}\left(z\right)=Tr\left(z\right)/2$ ต่อไปเราจะแสดงว่ารากของอนุพันธ์ของ P' ซึ่งอยู่ในเซต S เมื่อ

$$S=\left\{z\in C:-1/2<R\left(z\right)<1/2\right\}$$

2.1 กรณีที่ $P\left(z\right)$ มีดีกรีเท่ากับ d

ทฤษฎีบท 2.1.1 [5] กำหนดให้ $R\left(z\right)\in P\left(z\right)$ โดยที่ $\deg\left(R\left(z\right)\right)=n-1$ และ $R(z)=\varepsilon z+Q(z)$ เมื่อ $Q'(0)=0$ กำหนดให้ $P(z)=(z^{2}-1/4)(\varepsilon z+Q(z))$ และ

$$P'(z)=(n+1)(z-z_{1})...(z-z_{n}),$$

$$P'(z)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{n-k}s_{n-k}z^{k}$$

จะได้ว่า

(1) ถ้า $\varepsilon=0$ แล้ว $z=0$ เป็นรากของ P'

(2) ถ้า $|\varepsilon|<(n+1)/2^{n-2}$ แล้วจะมี $i\in\{1,2,...,n\}$ ซึ่งทำให้ $|Tr(z_{i})|<1$

(3) ถ้ามี k ซึ่งทำให้ $|s_{k}/s_{n}|>\binom{n}{k}2^{n-k}$ แล้วจะมี $i\in\{2,3,...,n\}$ ซึ่งทำให้ $|Tr(z_{i})|<1$

(4) ถ้า P' มีรากที่ $z=a$ เพียงรากเดียว แล้ว $Tr(a)=0$

การพิสูจน์ (1) ถ้า $\varepsilon=0$ แล้ว $z=0$ เป็นรากของ P'

กำหนดให้ $\varepsilon=0$ จาก $P\left(z\right)=\left(z^{2}-\frac{1}{4}\right)Q\left(z\right)$

จะได้ว่า $P'\left(z\right)=\left(z^{2}-\frac{1}{4}\right)Q'\left(z\right)+Q'\left(z\right)2z$ จึงทำให้ $P'\left(0\right)=0$

ดังนั้น $z=0$ เป็นรากของ P'

(2) จะแสดงว่า ถ้า $|\varepsilon|<(n+1)/2^{n-2}$ แล้วจะมี $i\in\{1,2,...,n\}$ ซึ่งทำให้ $|Tr(z_{i})|<1$

สมมติให้ $\left|Tr\left(z_{i}\right)\right|\geq 1$ สำหรับทุกๆ $i\in\{1,2,...,n\}$ จะแสดงว่า $|\varepsilon|\geq\frac{(n+1)}{2^{n-2}}$

จาก $P(z)=(z^{2}-1/4)(\varepsilon z+Q(z))$ จะได้ $P'\left(z\right)=\left(z^{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\varepsilon+Q'\left(z\right)\right)+\left(\varepsilon z+Q\left(z\right)\right)2z$

และพบว่า $P'(0) = \left(-\frac{1}{4}\right)\varepsilon + 0 \ = -\frac{\varepsilon}{4}$ จากทฤษฎีบท 1.2.1.16 จะได้
$P'(z) = (n+1)(z-z_1)\ldots(z-z_n)$ และ $P'(0) = (n+1)(-z_1)\ldots(-z_n)$
จะได้ว่า $\left|-\frac{\varepsilon}{4}\right| = (n+1)\left|-z_1\right|\ldots\left|-z_n\right|$ ดังนั้น จะได้ว่า $|\varepsilon| \geq 4(n+1)|z_1|\ldots|z_n|$
เนื่องจาก $|z_i| \geq \frac{1}{2}|Tr(z_i)|$ และ $|Tr(z_i)| \geq 1$ ดังนั้น $4(n+1)|z_1||z_2|\ldots|z_n| \geq \frac{4(n+1)}{2^n}$
นั่นคือ $|\varepsilon| \geq (n+1)/2^{n-2}$
(3) จะแสดงว่า ถ้ามี k ซึ่งทำให้ $|s_k/s_n| > \binom{n}{k}2^{n-k}$ แล้วจะมี $i \in \{2,3,\ldots,n\}$
ซึ่งทำให้ $|Tr(z_i)| < 1$ สมมติให้ $|Tr(z_i)| \geq 1$ สำหรับทุกๆ $i \in \{2,3,\ldots,n\}$
ต่อไปเราจะแสดงว่า $\left|\frac{S_k}{S_n}\right| \leq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^{n-k}$ สำหรับทุกๆ $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$
พิจารณา $P'(z) = (n+1)\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S_{n-k}Z^k$
เมื่อ $S_1(z_1,z_2,\ldots,z_n) = z_1+z_2+\ldots+z_n$ และสำหรับทุกๆ $i \in \{2,\ldots,n\}$

$$S_k(z_1,z_2,\ldots,z_n) = \sum_{i_1<i_2<i_k} z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_k}$$
$$S_n(z_1,z_2,\ldots,z_n) = z_1z_2\ldots z_n$$

และจะได้ $\left|\frac{S_k}{S_n}\right| = \sum\limits_{i_1<i_2<i_k}\frac{z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_k}}{z_1z_2\ldots z_n}$ เนื่องจาก $|z_i| \geq \frac{1}{2}|Tr(z_i)| \geq \frac{1}{2}$ นั่นคือ $\frac{1}{|z_i|} \leq 2$
ดังนั้น $\left|\frac{S_k}{S_n}\right| \leq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^{n-k}$

(4) จะแสดงว่า ถ้า P' มีรากที่ $z=a$ เพียงรากเดียว แล้ว $Tr(a) = 0$
สมมติให้ P' มีรากที่ z ดังนั้น $P(z) = (z-a)^{n+1} + b$
จาก $\frac{1}{2}$ และ $-\frac{1}{2}$ เป็นรากของ $P(z)$ จะได้ว่า $\left(\frac{1}{2}-a\right)^{n+1} = \left(-\frac{1}{2}-a\right)^{n+1}$
ดังนั้น $a \notin \left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$ และ $\frac{1}{2}-a = \rho\left(-\frac{1}{2}-a\right)$ สำหรับบางจำนวนเชิงซ้อน $\rho \neq 1$
ที่สอดคล้อง $\rho^{n+1} = 1$ ดังนั้น $n\rho = \rho\bar{\rho} = 1$ และ $Tr(\rho) \neq 2$
จากในสมการที่ $\frac{1}{2}-a = \rho\left(-\frac{1}{2}-a\right)$ จะได้ $a = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right)$
ดังนั้น $Tr(a) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\bar{\rho}-\rho+\rho-\bar{\rho}}{2-Tr(\rho)}\right] = 0$

ตัวอย่าง สมมติให้ $n = 2$ ดังนั้น $d = 3$ เป็นดีกรีของ $P(z)$ เมื่อกำหนดให้

$$P(z) = (z^2 - 1/4)R(z)$$

โดยที่ $R(z) = \varepsilon z + Q(z)$ สมมติให้ $Q(z) = 5$ ที่ $Q'(0) = 0$
จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)(\varepsilon z + 5)$
(1) ถ้า $\varepsilon = 0$ จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)\,5$ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} P'(z) &= \left(z^2 - 1/4\right)0 + 5(2z) \\ &= 4(10/4z) \end{aligned}$$

ดังนั้น $z = 0$ เป็นรากของ P'
(2) สมมติให้ $\varepsilon = 1$ จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)(z + 5)$
ดังนั้น $P'(z) = (z^2 - 1/4)(1) + (z + 5)\,2z$
นั่นคือ $P'(z) = 2\left(z + 5/3 + \sqrt{103}/6\right)\left(z - 1/6\left(\sqrt{103} - 10\right)\right)$
จะได้ $z_1 = -5/2 - \sqrt{103}/6$ และ $z_2 = 1/6\left(\sqrt{103} - 10\right)$ เป็นรากของ $P'(z)$
ดังนั้น $|Tr(z_2)| < 1$
(3) สมมติให้ $\varepsilon = 4$ จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)(4z + 5)$
นั่นคือ $P'(z) = (z^2 - 1/4)(4) + (4z + 5)(2z)$
ทำให้ได้ว่า $P'(z) = 2\left(z - 1/12\left(-5 - \sqrt{37}\right)\right)\left(z - 1/12\left(\sqrt{37} - 5\right)\right)$
โดย $z_1 = 1/12\left(-5 - \sqrt{37}\right)$ และ $z_2 = 1/12\left(\sqrt{37} - 5\right)$
พิจารณา $\left|\frac{S_1}{S_2}\right| = \left|\frac{z_1+z_2}{z_1 z_2}\right| = |-10| > 4$ ดังนั้น ที่ $k = 1$
จะทำให้ $|Tr(z_2)| < 1$

ตัวอย่าง สมมติให้ $n = 3$ ดังนั้น $d = 4$ เป็นดีกรีของ $P(z)$ เมื่อกำหนดให้

$$P(z) = (z^2 - 1/4)R(z)$$

โดย $R(z) = \varepsilon z + Q(z)$ สมมติให้ $Q(z) = z^2 + 2i$ และที่ $Q'(0) = 0$
จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)(\varepsilon z + z^2 + 2i)$ พิจารณาตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้
(1) ถ้า $\varepsilon = 0$ จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)(z^2 + 2i)$ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} P'(z) &= \left(z^2 - 1/4\right)2z + \left(z^2 + 2i\right)2z \\ &= 4z\left(z - 1/2\sqrt{1/2 - 4i}\right)\left(z + 1/2\sqrt{1/2 - 4i}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $z = 0$ เป็นรากของ P'
(2) สมมติให้ $\varepsilon = -1$ จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)(-z + z^2 + 2i)$
ดังนั้น $P'(z) = (z^2 - 1/4)(-1 + 2z) + (z^2 - z + 2i)\,2z$
นั่นคือ

$$\begin{aligned} P'(z) &= 4\,(z - (1.17231 - 0.64118i))\,(z - (0.00917 + 0.06428i)) \\ &\quad (z + (0.43148 - 0.57690i)) \end{aligned}$$

จะได้ $z_1 = 1.17231 - 0.64118i,\ z_2 = 0.00917 + 0.06428i$ และ
$z_3 = -(0.43148 - 0.57690i)$ เป็นรากของ $P'(z)$
และพบว่า $|Tr\,(z_2)| < 1$ และ $|Tr\,(z_3)| < 1$
(3) สมมติให้ $\varepsilon = 3$ จะได้ $P(z) = (z^2 - 1/4)(3z + z^2 + 2i)$
ดังนั้น

$$\begin{aligned} P'(z) &= 4\,(z - (0.23874 - 0.22299i))\,(z + (0.14473 + 0.19281i)) \\ &\quad (z + (2.34401 - 0.41581i)) \end{aligned}$$

โดย $z_1 = 0.23874 - 0.22299i,\ z_2 = -(0.14473 + 0.19281i)$ และ
$z_3 = -(2.34401 - 0.41581i)$ พิจารณา

$$\left|\tfrac{S_1}{S_3}\right| = \left|\tfrac{z_1+z_2+z_3}{z_1 z_2 z_3}\right| = \left|\tfrac{-2.25-(1\times10^{-5})i}{0.08099+0.01788i}\right| = |-27.78177| > 12$$

ดังนั้น ที่ $k = 1$ จะทำให้ $|Tr\,(z_1)| < 1$ และ $|Tr\,(z_2)| < 1$

2.2 กรณีที่ $P(z)$ มีรากอย่างมากที่สุด 3 รากที่แตกต่างกัน

สมมติให้ α, β, γ และ a เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $a \notin \{-1/2, 1/2\}$ กำหนดให้พหุนามในหัวข้อนี้อยู่ในรูป

$$P(z) = (z-1/2)^{\alpha}(z+1/2)^{\beta}(z-a)^{\gamma}$$

บทนิยาม 2.2.1 [4] ทรงกลมรีมันน์คือทรงกลมหนึ่งหน่วย $S = \{z \in \mathbb{R}^3 : |z| = 1\}$ สเตอริโอกราฟิคโปรเจกชัน (stereographic projection) คือการส่ง $\pi = S^2 - \{N\} \to \mathbb{C}$ เมื่อ $N = (0,0,1)$ โดยสำหรับทุกๆ $m \in S^2 - \{N\}$ แล้ว $\pi(M) = P$ เมื่อ P คือจุดเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง N และ M ตัดกับระนาบ xy

บทตั้ง 2.2.2 [5] กำหนดให้ α, β, γ เป็นจำนวนเต็มบวก และ h เป็นฟังก์ชันที่ใช้ความรู้จากทรงกลมรีมันน์และกำหนดให้

$$w = h(z) = \tfrac{Az+B}{Cz+D}$$

เมื่อ

(1) $A = 2(-\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha - \beta)\gamma)$

(2) $B = -\left((\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta)\gamma\right)$

(3) $C = 4\left((\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta)\gamma\right)$

(4) $D = -A = 2(\alpha^2 - \beta^2 + (\alpha-\beta)\gamma)$

จะได้ว่า ถ้า $|Tr(z)| \geq 1$ แล้ว $|Tr(w)| < 1$

การพิสูจน์ ในการพิสูจน์พบว่า ถ้า $|Tr(w)| < 1$ ก็ต่อเมื่อ $C_1 > 0$
เมื่อ $C_1 = 8\alpha s((\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\gamma) - 2(\beta^2-\alpha^2-\alpha\gamma)t + 4(\alpha+\beta)sn)$
และ $s = \alpha+\beta+\gamma,\ t = Tr(z),\ n = n(z)$ เนื่องจาก $t = Tr(z) = z + \bar{z}$
ดังนั้น $4n \geq t^2$ จึงจะเห็นได้ชัดว่า

$$8\alpha s((\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\gamma) - 2(\beta^2-\alpha^2-\alpha\gamma)t + (\alpha+\beta)sn) >$$
$$8\alpha s((\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\gamma) - 2(\beta^2-\alpha^2-\alpha\gamma)t + (\alpha+\beta)st^2)$$

นั่นคือ $C_1 > 0$ ก็ต่อเมื่อ $K_1 > 0$ เมื่อกำหนด

$$K_1 = 8\alpha s((\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\gamma) - 2(\beta^2-\alpha^2-\alpha\gamma)t + (\alpha+\beta)st^2)$$

และยังพบว่า ถ้า $K_1 > 0$ ก็ต่อเมื่อ $K = K_1/(8\alpha(\alpha+\beta)s^2) > 0$
พิจารณา $K = (t-t_1)(t-t_2) > 0$ โดยที่ $t_1 = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}, \quad t_2 = \frac{\beta-\alpha-\gamma}{\beta+\alpha+\gamma}$
เนื่องจาก $-1 < t_1,\ t_2 < 1$ และ $|t| \geq 1$ ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า $K > 0$
ในทำนองเดียวกัน เราจะพิสูจน์ว่า $Tr(w) > -1$ โดยการแสดงว่า

$$C_2 = 8\beta sL > 0$$

โดยที่ $L = (\beta-\alpha)(\beta+\gamma-\alpha) - 2(\gamma\beta+\beta^2-\alpha^2)t + 4(\alpha+\beta)sn$

ทฤษฎีบท 2.2.3 [5] กำหนดให้ a เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ α,β,γ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยกำหนดให้ $\gamma \geq 0$ ให้ $P(z)$ เป็นพหุนามนิยามโดย

$$P(z) = (z-1/2)^{\alpha}(z+1/2)^{\beta}(z-a)^{\gamma}$$

แล้ว $|Tr(r)| < 1$

การพิสูจน์ ในกรณีที่ $a \in \{-1/2, 1/2\}$ เราสามารถสมมติว่า $\gamma = 0$ เมื่อ r คือรากของ P' และได้ว่า

$$P'(z) = (z-1/2)^{\alpha}\beta(z+1/2)^{\beta-1} + (z+1/2)^{\beta}\alpha(z-1/2)^{\alpha-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P'(z)/P(z) &= \tfrac{(z-1/2)^{\alpha}\beta(z+1/2)^{\beta-1}+(z+1/2)^{\beta}\alpha(z-1/2)^{\alpha-1}}{(z-1/2)^{\alpha}(z+1/2)^{\beta}} \\ &= \beta/(z+1/2) + \alpha/(z-1/2) = 0 \end{aligned}$$

เราได้ $z = \frac{\beta-\alpha}{2(\beta+\alpha)}$ เป็นรากของ P' และสามารถแสดงได้ว่า $|Tr(z)| < 1$
ต่อไปพิจารณา

$$P(z) = (z-1/2)^{\alpha}(z+1/2)^{\beta}(z-a)^{\gamma}$$

และพบว่า

$$\begin{aligned} P'(z) &= (z-1/2)^{\alpha}(z+1/2)^{\beta}\gamma(z-a)^{\gamma-1} + (z-a)^{\gamma}\beta(z+1/2)^{\beta-1}(z-1/2)^{\alpha} \\ &\quad +(z+1/2)^{\beta}(z-a)^{\gamma}\alpha(z-1/2)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

และได้ว่า

$$P'(z)/P(z) = (\alpha+\beta+\gamma)z^2 + \left(\tfrac{\alpha}{2} - \alpha z - \tfrac{\beta}{2} - \beta a\right)z + \left(\tfrac{-\alpha a}{2} + \tfrac{\beta a}{2} - \tfrac{\gamma}{4}\right)$$

สมการดังกล่าวสามารถเขียนในรูป

$$\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)=0$$

เมื่อ $z_1+z_2=\frac{(1/2+a)\beta-(1/2-a)\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$ และ $z_1z_2=\frac{a(\beta-\alpha)/2-\gamma/4}{\alpha+\beta+\gamma}$
จาก 2 สมการนี้ จะเห็นได้ว่า

$$z_2=h\left(z_1\right)$$

ตัวอย่าง ให้ α,β,γ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยให้ $\alpha=3,\ \ \beta=2,\ \ \gamma=4$ และ
ให้ a เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $a=1$ จะได้ $P\left(z\right)=(z-1/2)^3(z+1/2)^2(z-1)^4$
ทำให้ได้

$$\begin{aligned} P'\left(z\right) &= (z-1/2)^3(z+1/2)^2 4(z-1)^3+(z-1)^4 2\left(z+1/2\right)\left(z-1/2\right)^3 \\ &\quad +3(z-1/2)^2(z+1/2)^2(z-1)^4 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P'\left(z\right)=9z^8-36z^7+\frac{105z^6}{2}-\frac{57z^5}{2}-\frac{76z^4}{16}+\frac{87z^3}{8}-3z^2-\frac{3z}{8}+\frac{3}{16}=0$
ดังนั้น $P'\left(z\right)=\frac{3}{16}(z-1)^3(2z-1)^2\left(2z+1\right)\left(6z^2-3z-1\right)=0$
เมื่อกำหนดให้ราก $r\notin\{-1/2,1/2\}$ จะทำให้ P' มีรากคือ $r_1=1,\ r_2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{11/4}}{4}$
และ $r_3=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{11/4}}{4}$ ดังนั้น ค่า $\left|Tr\left(r_2\right)\right|<1$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $a=i$ และให้ $P\left(z\right)=(z-1/2)^3(z+1/2)^2(z-1)^4$
จะได้

$$\begin{aligned} P'\left(z\right) &= 9z^8-4z^7-\frac{91z^6}{2}+\frac{39z^5}{2}+\frac{325z^4}{16}-\frac{65z^3}{8}-\frac{21z^2}{8} \\ &\quad +i\left(-32z^7+14z^6+36z^5-15z^4-9z^3+\frac{27z^2}{8}+\frac{z}{2}-\frac{1}{8}\right) \\ &\quad +\frac{7z}{8}+\frac{1}{16}=0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P'\left(z\right)=\frac{1}{16}(z-i)^3(2z-1)^2\left(2z+1\right)\left(18z^2+\left(1-10i\right)z-\left(2+i\right)\right)=0$
ดังนั้น $P'\left(z\right)=\frac{1}{16}(1-2z)^2(z-i)^3\left(2z+1\right)\left(z\left(18z+\left(1-10i\right)\right)-\left(2+i\right)\right)=0$
กำหนดให้ $r\notin\{-1/2,1/2\}$ จะได้ $r_1=i,\ r_2=\frac{1}{36}\left((-1+10i)-\sqrt{45+52i}\right)$
และ $r_3=\frac{1}{36}\left((-1+10i)+\sqrt{45+52i}\right)$ ดังนั้น ค่า $\left|Tr\left(r_1\right)\right|<1$

2.3 กรณีดีกรี d มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4

บทตั้ง 2.3.1 [5] ให้ a และ b คือ 2 จำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ $P(z)$ เป็นพหุนามของดีกรี d ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า a และ b เป็นรากของ $P(z)$ แล้ว P' มีราก r ที่สอดคล้องกับ

$$|r-(a+b)/2| \leq |(a-b)|/(2\tan(\pi/d))$$

บทตั้ง 2.3.2 [5] ให้ $P(z)$ คือ พหุนามที่มีดีกรี $d \leq 4$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้ $-1/2$ และ $1/2$ เป็นรากของ $P(z)$ และให้ ห.ร.ม. ของ P' และ $z^2-1/4$ แล้ว P' มีราก r ที่สอดคล้อง

$$|Tr(r)| < 1$$

การพิสูจน์ ตามข้อสังเกต เราจะสมมติให้ $n=4$ สังเกตว่า ถ้า $P(z)$ มีอนุพันธ์ แล้วอนุพันธ์นั้นเป็นอนุพันธ์ของ $-P(-z)$ ดังนั้น เพียงพอต่อการพิสูจน์ต่อไปนี้

(1) $\left((z^2-1/4)^2\right)' = 2(z^2-1/4)(2z)$

$$= (z-1/2)(z+1/2)4z$$

$$= (2z-1)(2z+1)z$$

ดังนั้น $\left((z^2-1/4)^2\right)' = (2z-1)(2z+1)z$

เมื่อกำหนด $P(z) = (z^2-1/4)$ หารากได้ คือ $-1/2$ และ $1/2$ และอนุพันธ์ของ $P(z)$ มี 3 รากที่แตกต่างกัน คือ 0, $-1/2$ และ $1/2$ จะเห็นว่ามี 1 ราก คือ 0 ซึ่งอยู่ระหว่าง $-1/2$ และ $1/2$ ที่เป็นรากของ $P(z)$

(2) $((z^2-1/4)(z^2-1/2))' = ((z^2-1/4)(z^2-z+1/4))'$

$$\begin{aligned}
&= (z^2-1/4)(2z-1)+(z^2-z+1/4)(2z)\\
&= 2z^3-z^2-2z/4+1/4+2z^3-2z^2+2z/4\\
&= 4z^3-3z^2+1/4\\
&= 4z^3-4z^2+z+z^2-z+1/4\\
&= 4z^3-4z^2+z+4z^2/4-4z/4+1/4\\
&= (z+1/4)4z^2-4z+1\\
&= (z+1/4)4z^2-2z-2z+1\\
&= (1/4)(4z+1)(2z-1)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(\left(z^2-1/4\right)\left(z^2-1/2\right)\right)' = (1/4)\,(4z+1)\,(2z-1)^2$

เมื่อกำหนดให้ $P(z) = \left(z^2-1/4\right)\left(z^2-1/2\right)$ หารากได้ คือ $-1/2,\ 1/2,$ และ $1/\sqrt{2}$ และอนุพันธ์ของ $P(z)$ มีราก คือ $-1/4$ และมีรากซ้ำ คือ $1/2$ จะเห็นว่ามีราก 1 ราก คือ $-1/4$ ซึ่งอยู่ระหว่าง $-1/2$ และ $1/2$ ที่เป็นรากของ $P(z)$

(3) $P(z) = \left(z^2-1/4\right)(z-1/2)(z-a)$ เมื่อ $a \notin \{-1/2, 1/2\}$

กรณีที่ (1) และ (2) เราได้ข้อสรุปอย่างแท้จริงจากทฤษฎีบท 1.1 ข้อ 2 สังเกตได้ว่า $P(z)$ มี 3 รากที่แตกต่างกัน ในกรณีที่ (3) ดังนั้น ผลที่ได้มาจากทฤษฎีบท 2.2

ทฤษฎีบท 2.3.3 [5] ให้ $P(z)$ คือ พหุนามของดีกรี $d \leq 4$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น $P(1/2) = 0 = P(-1/2)$ แล้ว P' มีราก r ที่สอดคล้อง $|Tr\,(r)| < 1$

การพิสูจน์ ผลที่ได้ทันทีต่อไปนี้จาก บทตั้งที่ 2.3.1 และบทตั้งที่ 2.3.2

ในกรณี $P(z)$ มี 4 รากที่แตกกัน และ $d \geq 5$ ยังคงเป็นปัญหาที่ยังหาข้อสรุปไม่ได้

ตัวอย่าง กำหนดให้ a และ b เป็นรากของ $P(z)$ ซึ่ง $a \neq b$ และกำหนดให้ $a = 1/2$ และ $b = -1/2$ ดังนั้น $P(a) = 0 = P(b)$ โดย $P(z) = (z^2-1/4)(z-1/2)(z-1/4)$
หรือ $P(z) = 1/16(16z^4-12z^3-2z^2+3z)$ ทำให้ได้ $P'(z) = 1/16(64z^3-36z^2-4z+3)$
นั่นคือ $P'(z) = 4z^3-(9z^2)/4-z/4+3/16$ ดังนั้น $P'(z) = 1/16(2z-1)(32z^2-2z-3)$
จะได้ว่า $P'(z) = 0$ ทำให้ได้รากของ $P'(z)$ คือ $r_1 = 1/32-\sqrt{97}/32$ และ
$r_2 = 1/32+\sqrt{97}/32$ โดยค่า $|Tr\,(r_1)| < 1$ และ $|Tr\,(r_2)| < 1$

บรรณานุกรม

[1] ก่อสุข วีระถาวร ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน, มหาวิทยาลัยรามคำแหง 2556

[2] สุเทพ ทองอยู่ พีชคณิตนามธรรม 2 มศว.ประสานมิตร 2523

[3] Calculus and its application, New Jersey, Prentice-Hall, Inc.1977

[4] Lars V. Ahlfors. COMPLEX ANALYSIS. McGraw-Hill, Inc

[5] Luis H. Gallardo. Received 22 October 2004. On Rolle's Theorem For Polynomials Over The Complex Numbers*

บรรณานุกรม

[1] ก่อสุข วีระถาวร ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน, มหาวิทยาลัยรามคำแหง 2556

[2] สุเทพ ทองอยู่ พีชคณิตนามธรรม 2 มศว.ประสานมิตร 2523

[3] Calculus and its application, New Jersey, Prentice-Hall, Inc.1977

[4] Lars V. Ahlfors. COMPLEX ANALYSIS. McGraw-Hill, Inc

[5] Luis H. Gallardo. Received 22 October 2004. On Rolle's Theorem For Polynomials Over The Complex Numbers*