รากของพหุนามดีกรี 4 และการประยุกต์

ภริดา ส่องแสงมณีเลิศ

สุภัชญา กุณาธรรม

การศึกษาอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2559

มหาวิทยาลัยพะเยา

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยพะเยา

รากของพหุนามดีกรี 4 และการประยุกต์

ภริดา ส่องแสงมณีเลิศ

สุภัชญา กุณาธรรม

การศึกษาอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2559

มหาวิทยาลัยพะเยา

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยพะเยา

คณะกรรมการสอบการศึกษาอิสระ อาจารย์ที่ปรึกษา และคณบดีคณะวิทยาศาสตร์ ได้พิจารณาการศึกษาเรื่อง "รากของพหุนามดีกรี 4 และการประยุกต์" เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยพะเยา

....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กมลรัตน์ แนมมณี)
ประธานกรรมการ

....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรรณิการ์ ขำพึ่งสน)
กรรมการ

....
(นางสาวศิริลักษณ์ เผ่ากันทะ)
กรรมการ

....
(รองศาสตราจารย์ปรียานันท์ แสนโภชน์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
ธันวาคม 2559

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยพะเยา

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาอิสระฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือ อนุเคราะห์และสนับสนุนจากหลาย ๆ ส่วนด้วยกัน

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์กรรณิการ์ ขำพึ่งสน เป็นอย่างสูง อาจารย์ที่ปรึกษา ที่คอยให้คำปรึกษา คำแนะนำ ที่เป็นประโยชน์ต่องานการศึกษาอิสระฉบับนี้เป็นอย่างมาก ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องของงานการศึกษาอิสระ และให้การดูแลด้านต่างๆเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์กลมรัตน์ แนมมณี และ อาจารย์ศิริลักษณ์ เผ่ากันทะ ผู้เป็นคณะกรรมการสอบการศึกษาอิสระที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะแก่งานการศึกษาอิสระฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ทุกท่าน ที่คอยอบรมสั่งสอนดูแลเอาใจใส่ด้วยดีตลอดมา

ขอขอบพระคุณบิดามารดาญาติพี่น้อง ผู้ให้กำลังใจและการสนับสนุนอย่างสม่ำเสมอ ตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนจบสมบูรณ์และตลอดการศึกษา

ขอขอบคุณเพื่อนๆนิสิตสาขาคณิตสาสตร์ทุกคน สำหรับความช่วยเหลือต่างๆ และคอยเป็นกำลังใจให้กันตลอดมา

ภริดา ส่องแสงมณีเลิศ
สุภัชญา กุณาธรรม

ชื่อเรื่อง	รากของพหุนามดีกรี 4 และการประยุกต์
ผู้ศึกษาค้นคว้า	นางสาวภริดา ส่องแสงมณีเลิศ
	นางสาวสุภัชญา กุณาธรรม
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรรณิการ์ ขำพึ่งสน
วิทยาศาสตรบัณฑิต	สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คำสำคัญ	พหุนามดีกรี4 ทฤษฎีบทตัวคูณลากรานจ์ จุดนิ่ง

บทคัดย่อ

ในการศึกษาอิสระครั้งนี้ เราศึกษาวิธีการใหม่ในการหาค่ารากของพหุนามดีกรี 4 และนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน $\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$ เมื่อ $x^T x = 1$ A เป็นเฮอร์มิเทียนเมทริกซ์ขนาด 2 x 2 และ $b \in \mathbb{R}^2$

Title	Root quartic polynomail and its application
Author	Miss Parida Songsaengmaneelert
	Miss Supatchaya Kunatham
Advisor	Assist. Prof. Dr. Kannika Khompurngson
Bachelor of Science	Program in Mathematics
Keywords	Quartic Polynomiad, Lagrange Multiplier,
	Stationary Points

ABSTRACT

We study the new method of finding the root of quartic polynomail and apply it to the problem of the maximum and minimum values of function $\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$ where $x^T x = 1$, A is a 2 x 2 Hermitian matrix and $b \in \mathbb{R}^2$.

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ในการศึกษาอิสระครั้งนี้ เราศึกษาวิธีการใหม่ในการหาค่ารากของพหุนามดีกรี 4 และนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน $\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$ บนทรงกลม เมื่อกำหนดให้ $x^T x = 1$ โดยที่ A เป็นเฮอร์มิเทียนเมทริกซ์ขนาด 2 x 2 และ $b \in \mathbb{R}^2$

ในปี ค.ศ.1965 Forsythe และ Golub ได้ศึกษาเกี่ยวกับจุดหยุดนิ่งของฟังก์ชัน

$$\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$$

บนทรงกลม $x^T x = 1$ ซึ่งสามารถหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันได้ โดยงานวิจัยดังกล่าวได้กำหนด A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเทียนขนาด $n \times n$ และ $b \in \mathbb{R}^n$ ซึ่งโดยหนึ่งในขั้นตอนการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันใช้ความรู้ในการแก้สมการพหุนามที่มีดีกรีค่อนข้างสูง ซึ่งในปัจจุบันการคำนวณหาค่าสมการดังกล่าวอาจจะใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการคำนวณ

Amir Fathi และ Nastaran Sharifan ได้ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับพหุนามที่มีดีกรีสูง เนื่องจากในปัจจุบันพหุนามหรือสมการพหุนามนั้นมีบทบาททั้งใน คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เคมี ฟิสิกส์ และ เศรษฐศาสตร์ ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้อย่างกว้างขวาง ตั้งแต่โจทย์ปัญหาพื้นฐานไปจนถึงปัญหาที่มีความซับซ้อนของวิทยาศาสตร์ ทว่าในปัจจุบันยังไม่มีสูตรในการหาสมการพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าสามได้ พวกเขาจึงคิดค้นสูตรในการหาค่ารากของพหุนามดีกรี 4 ขึ้นเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาเหล่านั้น

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึง ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ในการศึกษาอิสระในครั้งนี้ บทที่ 3 จะกล่าวถึงการการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของพหุนามดีกรี 2 บนทรงกลม 1 หน่วย ในส่วนของบทที่ 4 นั้นจะเป็นวิธีการหาค่าร่ากของพหุนามดีกรี 3 และ 4 และบทที่ 5 จะเป็นการประยุกต์ใช้วิธีการหาค่ารากของพหุนามดีกรี 4 กับปัญหาการหาค่าสูงสุด และ ต่ำสุดของฟังก์ชัน $\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$บนทรงกลม $x^T x = 1$ โดยที่ A เป็นเฮอร์มิเทียนเมทริกซ์ขนาด 2 x 2 และ $b \in \mathbb{R}^2$

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

การศึกษาหัวข้อในเอกสารนี้ เราได้ศึกษาความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต่างๆดังต่อไปนี้

2.1 ปริภูมิผลคูณภายใน

บทนิยาม 2.1.1 [4] ให้ $\mathbb{F}$ เป็นฟิลด์ (field) และ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง เราจะเรียกเซต X ว่าเป็น ***ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)*** ก็ต่อเมื่อ มีการดำเนินการภายใต้การบวก เขียนแทนด้วย + และ การคูณด้วยสเกลาร์ เขียนแทนด้วย $\cdot$ บนเซต X ซึ่งมีคุณสมบัติ ดังต่อไปนี้ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

(1) $x + y \in X$ และ $x + y$ มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

(2) $x + y = y + x$

(3) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(4) จะมีสมาชิกใน X ซึ่งเขียนแทนด้วย 0 และจะเรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $0 + x = x = x + 0$

(5) จะมีสมาชิกใน X ซึ่งเขียนแทนด้วย $-x$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$(-x) + x = 0 = x + (-x)$$

(6) $\alpha \cdot x \in X$ และ $\alpha \cdot x$ มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

(7) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

(8) $1 \cdot x = x$

(9) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

(10) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

เราจะเรียก $(X, +, \cdot)$ ว่าเป็น ***ปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์*** F ***(Vector Space Over Field*** F***)*** และจะเรียกสมาชิกในฟิลด์ F ว่า ***สเกลาร์ (Scalar)***

บทนิยาม 2.1.2 [4] ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนจำนวนจริงที่มี 0 เป็นเวกเตอร์ศูนย์และกำหนดให้ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ และ $v_i \neq v_j$ เมื่อ $i \neq j$ จะกล่าวว่า S ***เป็นอิสระเชิงเส้น (Linear independence)*** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ แล้วเราจะได้ว่า $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ และถ้าไม่เป็นเช่นนี้ จะกล่าวว่า S ***ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (Linear dependence)*** ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ $\alpha_i \neq 0, \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ที่ทำให้ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$

บทนิยาม 2.1.3 [4] ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner product space)
กำหนดให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และให้ $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้
(1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ สำหรับทุก $x \in X$
(2) $\langle x, x\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
(3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$
(4) $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และทุก $\alpha \in \mathbb{F}$
เราเรียก $\langle x, y\rangle$ ว่า ผลคูณภายในของ x กับ y และเรียกคู่อันดับ $(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ว่า ปริภูมิผลคูณภายใน

บทนิยาม 2.1.4 [4] ให้ $(X, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ เป็นปริภูมิผลคูณภายใน $S \subseteq X$ จะเรียกว่า ***เซตเชิงตั้งฉากปกติ (Orthonormal set)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $x, y \in S$

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0; x \neq y \\ 1; x = y \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.1.5 [4] *กำหนดให้ $(X, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ เป็นปริภูมิผลคูณภายใน ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ เป็น เวกเตอร์ที่อิสระเชิงเส้นต่อกัน แล้วจะมี $T^* = \{x_1^*, \ldots, x_{n+1}^*\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ เมื่อ*

$$x_k^* = \frac{y_k}{\|y_k\|}$$

เมื่อ

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, x_I^*\rangle x_I^*$$

สำหรับทุกๆ $k = 1, 2, \ldots, n+1$

ทฤษฎีบท 2.1.6 [4] อสมการชวาร์ซ (The Schwarz Inequality)
ให้ $(X, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ เป็นปริภูมิผลคูณภายใน และ $x_1, x_2 \in X$ จะได้ว่า

$$|\langle x_1, x_2\rangle|^2 \leq \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle$$

ในกรณีเฉพาะสมการด้านบนเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ x_1 และ x_2 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

บทตั้ง 2.1.7 [4] อสมการโฮลเดอร์ (Holder's Ineqality)
ให้ $x, y \in \mathbb{R}^n$ ถ้า $p > 1$ และ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ แล้ว

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

บทนิยาม 2.1.8 [4] ปริภูมินอร์ม (Normed space)
ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และให้ $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้
(1) $\|x\| \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in X$
(2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ สำหรับทุกๆ $x \in X$
(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ สำหรับทุกๆ $x \in X$ และ ทุกๆ $\alpha \in \mathbb{R}$
(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$
เราเรียก $\|x\|$ ว่านอร์มหรือขนาดของ x และเรียกคู่อันดับ $(X, \|\cdot\|)$ ว่า ปริภูมินอร์ม
ทฤษฎีบท 2.1.9 [4] *ให้ $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ เป็นปริภูมิผลคูณภายใน กำหนดให้ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ สำหรับทุกๆ $x \in X$ แล้ว $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์ม*

2.2 ค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ

บทนิยาม 2.2.1 [2] ให้ A เป็นเมทริกซ์จัสตุรัสมิติ $n \times n$ จะเรียก A ว่าเป็น ***เมทริกซ์เฮอร์มิเทียน (Hermitian matrix)*** ก็ต่อเมื่อ $A = A^*$ และ $A^* = \bar{A}^T$ เมื่อ $\bar{A}$ เป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน A จะพบว่า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเทียน ก็ต่อเมื่อ A มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้
(1) A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส
(2) ทุกๆสมาชิกบนทแยงมุมหลักเป็นจำนวนจริง
(3) สมาชิกที่สมมาตรกัน โดยเฉพาะมีสมาชิกบนทแยงมุมหลักเป็นแกนสมมาตร จะเป็นสังยุคซึ่งกันและกัน
บทนิยาม 2.2.2 [2] ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ และค่าจำนวนจริง λ จะเรียกว่า ***ค่าเฉพาะ (eigenvalue)*** ของเมทริกซ์ A ถ้ามีเวกเตอร์ x ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ทำให้

$$Ax = \lambda x$$

และเรียกเวกเตอร์ x ว่าเป็น ***เวกเตอร์เฉพาะ (eigenvector)*** ของค่าเฉพาะ λ ให้ λ เป็นค่าเฉพาะของ $n \times n$ เมทริกซ์ A และ x เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่ทำให้

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax &= \lambda I_n x \\ (\lambda I_n - A)x &= 0 \end{aligned}$$

จากสมการ $Ax = \lambda x$ มีผลเฉลยไม่เท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ $det(\lambda I_n - A) = 0$ และเรียกว่า ***สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)*** ของ A

ทฤษฎีบท 2.2.3 [2] *ให้ A เป็นเมทริกซ์จัสตุรัสมิติ $n \times n$ และให้ λ เป็นค่าเฉพาะของ A และ x เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่า λ แล้ว λ จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $P^{-1}AP$ และเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับ $x' = p^{-1}x$ เมื่อ P เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$*

ทฤษฎีบท 2.2.4 [2]*ให้ A เป็นเมทริกซ์จัสตุรัสมิติ $n \times n$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

(1) A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้

(2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ เมื่อ v_i เป็นเวกเตอร์เฉพาะ A

(3) A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

2.3 ทฤษฎีบทตัวคูณลากรองจ์ (lagrange multiplier)

ทฤษฎีบทตัวคูณลากรองจ์ (lagrange multiplier) [6]

กำหนดให้ $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ และให้ x^* เป็นค่าต่ำสุดเฉพาะของฟังก์ชัน f ภายใต้เงื่อนไข $h(x) = 0$ และสมมติ $\triangledown h_1(x^*), \ldots, \triangledown h_m(x^*)$ เป็นอิสระเชิงเส้น $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ จะเรียกว่า เวกเตอร์ตัวคูณลากรานจ์ ที่ทำให้สมการ

$$\triangledown f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \triangledown h_1(x^*) = 0$$

เป็นจริง

หมายเหตุ $\triangledown$ คือ เกรเดียนต์ของ h

ตัวอย่าง 2.3.1 กำหนดให้ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ จงหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชั่น f ภายใต้เงื่อนไข $h(x, y, z) = 4x + 2y - 2z - 4 = 0$

การพิสูจน์ จากสมการ $h(x, y, z) = 4x + 2y - 2z - 4 = 0$ จะได้

$$\triangledown h(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0$$

สำหรับทุกๆ $x, y, z \in \mathbb{R}$ จาก

$$\triangledown f(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) = 0$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\lambda \\ 2\lambda \\ -2\lambda \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -\lambda \end{aligned}$$

จากสมการ $h(x,y,z) = 4x + 2y - 2z - 4 = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} 4(2\lambda) + 2(\lambda) - 2(-\lambda) - 4 &= 0 \\ 12\lambda &= 4 \\ \lambda &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{1}{3}$ เมื่อแทนค่าใน

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 \\ &= \frac{4+1+1}{9} \\ &= \frac{6}{9} \\ &\approx 0.667 \end{aligned}$$

ต่อไปจะพิจารณา $f(x,y,z)$ ที่จุด $(\frac{2}{3}), (\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3})$ มีค่าเป็นจุดต่ำสุดหรือสูงสุด โดยเลือกจุด $(0,0,-2)$ ซึ่งสอดคล้องกับ $h(x,y,z) = 4x + 2y - 2z - 4 = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= 4(0) + 2(0) - 2(-2) - 4 \\ &= 0 + 0 + 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) > f(0,0,-2)$ นั่นคือ f มีค่าสูงสุด ที่จุด $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ $\square$

2.4 จำนวนเชิงซ้อนและคุณสมบัติบางประการ

จากหัวข้อของการศึกษาอิสระในครั้งนี้ เราจะทำการหาค่าของพหุนามดีกรี 4 ซึ่งค่าที่หาได้มีทั้งค่าที่เป็นจำนวนจริงและค่าที่อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นเราจึงจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานในการหาค่ารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน โดยสูตรบทของเดอมัวร์

ทฤษฎีบท 2.4.1 [1] *ถ้า* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *เป็นจำนเชิงซ้อนใดๆ และ* n *เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า* $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

หมายเหตุ ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ $r = 1$ จะได้ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ ซึ่งเรียกว่า **สูตรของเดอมัวร์** (De Moivre's Formula) การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 2.4.2 [1] ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $w^n = z$ จะกล่าวว่า w เป็นรากที่ n ของ z

ดังนั้น $w^n = z$ และ $s^n = r$ และ $n\phi = \theta + 2k\pi$

$$s = r^{\frac{1}{n}} \text{ และ } \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

ดังนั้น $w = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$

บทที่ 3
การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของพหุนามดีกรี 2 บนทรงกลม 1 หน่วย

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการค่าหาสูงสุดและต่ำสุดของพหุนามดีกรี 2 บนทรงกลม โดยกำหนด ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ โดยที่ $b \in \mathbb{R}$ และกำหนดให้ $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ สำหรับ ทุกๆ $x \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง

$$\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$$

พิจารณาหาค่าสูงสุดและต่ำสุดได้จาก x ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $x^T x \leq 1$

บทนิยาม 3.1 [2] กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว และจุด d เป็นจุดในโดเมน โดยที่จุด $(d, f(d))$ เป็น จุดนิ่ง (Stationaty) ก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ของ f ที่ d มีค่าเท่ากับ 0 ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และจุด $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ เป็นจุดในโดเมน จุด $(d_1, d_2, \ldots, d_n, f(d_1, d_2, \ldots, d_n))$ เป็นจุดนิ่งก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_i ณ จุด $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ มีค่าเท่ากับ 0 ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

บทตั้ง 3.2 [5] กำหนดให้ $x \in \mathbb{R}^n$ และ $x^T x$ แล้ว $\Phi(x)$ เป็นจุดนิ่งก็ต่อเมื่อมี λ เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\lambda = \lambda(x)$ แล้วทำให้

$$A(x-b) = \lambda x \tag{3.1}$$

$$x^T x = 1 \tag{3.2}$$

บทนิยาม 3.3 [5] ***สเปตรัม (spectrum)*** ของ (A, b) คือ $\lambda : \lambda \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ x สอดคล้องกับ (3.1) และ (3.2) นั่นคือ $(x, \Phi(x))$ เป็นจุดนิ่ง

จาก A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ดังนั้นจะได้ว่าจะมี $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นจำนวนจริงของ A และให้ $u_1, \ldots, u_n$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติของเวกเตอร์เฉพาะ ซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะของ λ_i ดังนั้น $Au_i = \lambda_i u_i, i = 1, \ldots, n$ จะได้ว่า

$$\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i)^2 \lambda_i \tag{3.3}$$

จาก $A(x-b)$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \Lambda) x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i u_i \tag{3.4}$$

บทตั้ง 3.4 [5] *สเปกตรัมของ* (A, b) *คือค่าของจำนวนจริงที่ทำให้ฟังก์ชันของจำนวนจริง*

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2 |b_i^2|}{(\lambda_i - \Lambda)^2} = 1 \tag{3.5}$$

และค่าลักษณะเฉพาะของ A ซึ่งทำให้ $g(\lambda_k) \leq 1$ ในกรณีเฉพาะ
เราจะนิยามว่า $(0/0 = 0, 1/0 = \infty)$

ต่อไปเราจะแสดงการพิศูจน์บทตั้ง 3.4 เนื่องจากเราจำเป็นต้องใช้การพิสูจน์นี้เพื่อศึกษาผลในขั้นถัดไป

การพิสูจน์ จาก (3.4) สรุปได้ว่า

$$(\lambda_i - \Lambda)x_i = \lambda_i b_i, i = 1, \ldots, n \tag{3.6}$$

กำหนดให้เซต $I = i : \lambda_i b_i = 0$ จาก (3.6) จะได้ว่า

$$x_i = \frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i - \Lambda} \quad , \quad i \notin I \tag{3.7}$$

$$(\lambda_i - \Lambda)x_i = 0 \quad , \quad i \in I \tag{3.8}$$

เมื่อพิจารณาค่า $\Lambda \in \{\lambda_i : i \notin I\}$ ดังนั้น $\lambda_i b_i \neq 0$ จากสมการ (3.6) จะได้ว่า $0 = \lambda_i b_i$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง นั่นคือ $\Lambda \in \{\lambda_i : i \notin I\}$ ไม่เป็นสเปกตรัมของ (A, b) ได้
และเมื่อพิจารณา ให้ $\Lambda \notin \{\lambda_i : i = 1, \ldots, n\}$ จาก (3.7) และ (3.8) จะได้ว่า

$$x_i^{\Lambda} = \frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i - \Lambda} \quad , \quad i \notin I \tag{3.9}$$

$$x_i^{\Lambda} = 0 \quad , \quad i \in I \tag{3.10}$$

จะได้ว่า Λ เป็นสเปกตรัมก็ต่อเมื่อ

$$(x^{\Lambda})^T x^{\Lambda} = \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i^2|}{(\lambda_i - \Lambda)^2} = 1 \tag{3.11}$$

ดังนั้น สเปกตรัมของ (A, b) คือค่าลักษณะเฉพาะของ A ซึ่งทำให้ $g(\lambda_k) \leq 1$ โดยที่ $\Lambda = \lambda_j$ สำหรับบาง $j \in I$ นั่นคือ $\lambda_i b_i = 0$ กำหนดให้ $I(\lambda_j) = \{i : \lambda_{i=\lambda_j}\}$ และพิจารณา 2 กรณีคือ
กรณีที่ 1 ถ้า $I(\lambda_j) \cap \{i : \lambda_i b_i \neq 0\} \neq \phi$ แล้ว $\lambda_j \in \{\lambda_i : i \notin I\}$
จากที่แสดงข้างต้นเราพบว่า λ_j ไม่สามารถเป็นสเปกตรัมของ (A, b) ได้

กรณีที่ 2 ถ้า $I(\lambda_j) \cap \{i : \lambda_i b_i \neq 0\} = \phi$ แล้ว $I(\lambda_j) \subset I$ ซึ่งกรณีนี้จะได้ว่า

$$x_i^{\Lambda} = \frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i - \Lambda} \quad , \quad i \notin I \tag{3.12}$$

$$x_i^{\Lambda} = 0 \quad , \quad i \in I - I(\lambda_j) \tag{3.13}$$

$$x_i^{\Lambda} \in \mathbb{R} \quad , \quad i \in I(\lambda_j) \tag{3.14}$$

และจาก

$$(x^{\lambda_j})^T x^{\lambda_j} = \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i^2|}{(\lambda_i - \Lambda)^2} + \sum_{i \in I(\lambda_j)} |x_i^{\lambda_j}|^2 = 1 \tag{3.15}$$

ดังนั้นจะได้ว่า λ_j จะเป็นสเปตรัมของ (A, b) ก็ต่อเมื่อ

$$g(\Lambda_j) = \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i^2|}{(\lambda_i - \Lambda)^2} \leq 1$$

$\square$

ทฤษฎีบท 3.5 [5] *ให้สเปกตรัมของ* (A, b) *คือจำนวน* $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p\}$ *ซึ่ง* $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_p$

$$\Phi(x^{\Lambda_1}) = \Lambda_j + \Lambda_j \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|^2}{\lambda_i - \Lambda_j} \tag{3.16}$$

และ $\Phi(x^{\Lambda_1}) < \ldots < \Phi(x^{\Lambda_p})$

การพิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก [4]

ทฤษฎีบท 3.6 [5] ถ้า $max_i \lambda_i \leq 0$ และ $\sum_{\lambda_i < 0} |b_i|^2 \leq 1$ แล้ว ค่าสูงสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น 0 และ ถ้า $min_i \lambda_i \geq 0$ และ $\sum_{\lambda_i > 0} |b_i|^2 \leq 1$ แล้ว ค่าต่ำสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น 0 ถ้าไม่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว เราพบว่า ค่าสูงสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น $\Phi(x^{\Lambda_p})$ และ ค่าต่ำสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น $\Phi(x^{\Lambda_1})$ ตามลำดับ

การพิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก [4]

เนื่องจากในทฤษฎีบท 3.5 และ 3.6 เราสามารถแทนค่าเพื่อหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันได้เลย ดังนั้นเราจึงจะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์ทฤษฎีบททั้งสองทฤษฎีบทนี้

บทที่ 4
การหาค่าพหุนามดีกรี 3 และ 4

4.1 การหาค่าพหุนามดีกรี 3

พิจารณา $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรีสาม กำหนดให้

$$y = x - \frac{b}{3a} \tag{4.1}$$

แล้วจะได้

$$x^3 + px + q = 0 \tag{4.2}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} p &= -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \\ q &= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ $x = u + v$ แทนค่าใน (4.2)

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \tag{4.3}$$

และสามารถสรุปได้ว่า u และ v จะต้องมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้ จึงจะทำให้สมการเป็นจริง

$$u^3 + v^3 = -q \tag{4.4}$$

$$uv = -\frac{p}{3} \Longrightarrow u^3 \times v^3 = -\frac{p^3}{27} \tag{4.5}$$

สมการดังต่อไปนี้มีค่าราก คือ u^3 และ v^3

$$x^2 - (u^3 - v^3)x + u^3v^3 = 0 \tag{4.6}$$

แทนค่า (4.4) และ (4.5) ลงใน (4.7)

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0 \Longrightarrow \tag{4.7}$$

โดยที่

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{4.8}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{4.9}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{4.10}$$

ผู้อ่านสามารถอ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก [3]

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหาค่ารากของสมการ $y^3 + 12y^2 + 54y + 68 = 0$
วิธีทำ กำหนดให้ $y = x - \frac{12}{3(1)}$ และทำให้ได้ $x^3 + 6x - 20 = 0$
จะได้ว่า $u = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$ และ $v = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$
จาก สูตรของเดอมัวร์ เราจะได้ค่ารากของ u และ v ซึ่งแสดงดังตารางดังนี้

ค่าราก	$\mathrm{u}_1 = 2.7$	$\mathrm{u}_2 = -\frac{2.7}{2} + i\frac{2.7\sqrt{3}}{2}$	$\mathrm{u}_3 = -\frac{2.7}{2} - i\frac{2.7\sqrt{3}}{2}$
$\mathrm{v}_1 = -0.7$	2	-2.1+i1.4$\sqrt{3}$	-2.1-i1.4$\sqrt{3}$
$\mathrm{v}_2 = \frac{0.7}{2} - i\frac{0.7\sqrt{3}}{2}$	2.6+i0.6$\sqrt{3}$	1+i($\sqrt{3}$)	-1
$\mathrm{v}_3 = \frac{0.7}{2} + i\frac{0.7\sqrt{3}}{2}$	2.6-i0.6$\sqrt{3}$	1	-1-i($\sqrt{3}$)

เมื่อนำไปแทนค่าในสมการ (4.4) เราจึงได้ 3 ค่าที่สอดคล้องกับสมการดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 + i(\sqrt{3}) \\ .0x_3 &= -1 - i(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

และทำให้ได้ว่า $y = -2, -5 + \sqrt{3}i$ และ $-5 - \sqrt{3}i$ $\square$

4.2 การหาค่าพหุนามดีกรี 4

รูปแบบของสมการพหุนามดีกรีสี่คือ

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0 \tag{4.11}$$

ในขั้นที่หนึ่ง เราจะลดรูปของสมการด้วยการ แทนค่า

$$y = x - \frac{b}{4a} \tag{4.12}$$

ลงใน (4.11) และจะได้สมการ

$$x^4 + px^2 + qx + s = 0 \tag{4.13}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} p &= -\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a} \\ q &= \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a} \\ s &= -\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a} \end{aligned}$$

ขั้นที่สอง กำหนดให้ $x = u + v + s$ จะได้ว่า

$$(u+v+s)^4 + p(u+v+s)^2 + q(u+v+s) = 0 \tag{4.14}$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 + s^4 + 4v^3s + 4vs^3 + 4u^3v + 4u^3s + 4uv^3 + 4us^3 + \\ 6u^2v^2 + 6u^2s^2 + 6v^2s^2 + 8uvs^2 + 4uvs^2 + 8uv^2s + 4uv^2s + 8u^2vs + \\ 4u^2vs + p(u^2+v^2+s^2) + 2p(uv+us+vs) + q(u+v+s) + s = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

จากสมการข้างต้นสามารถทำให้เกิดสามสมการ
สมการแรกคือ

$$8uvs^2 + 8uv^2s + 8u^2vs + q(u+v+s) = 0 \tag{4.16}$$

$$uvs = -\frac{q}{8} \tag{4.17}$$

จากสมการ (4.15) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u^4+v^4+s^4+4(u^4+v^4+s^4)(uv+us+vs)+ \\ p(u^4+v^4+s^4)+2p(uv+us+vs)+s+ \\ 6(u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2)=0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

จะได้สมการที่สอง คือ

$$u^2+v^2+s^2=-\frac{p}{2} \tag{4.19}$$

จากนั้นแทนสมการที่สองที่เราได้ใน (4.18) จะได้

$$(u^4+v^4+s^4)-\frac{p^2}{2}+s+6(u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2)=0 \tag{4.20}$$

และสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} u^2+v^2+s^2 &= -\frac{p}{2} \\ (u^2+v^2+s^2)^2 &= (-\frac{p}{2})^2 \\ u^4+v^4+s^4+2(u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2) &= \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้

$$\begin{aligned} u^4+v^4+s^4 &= A \\ u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2 &= B \\ A+2B &= \frac{p^2}{4} \end{aligned} \tag{4.21}$$

แทนค่า A และ B ในสมการ (4.20) เราจะได้สมการดังนี้

$$A+6B=\frac{p^2}{4}-s \tag{4.22}$$

จากนั้นเราจะแก้สองสมการโดยการหาจากสมการ (4.21) และ (4.22) จะได้

$$B=\frac{p^2}{16}-\frac{s}{4}=u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2 \tag{4.23}$$

$$A=\frac{p^2}{8}=u^4+v^4+s^4 \tag{4.24}$$

จากสมการจะเห็นได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 &= u^4v^4 + u^4s^4 + v^4s^4 + 2u^2v^2s^2(u^2+v^2+s^2) \\ B^2 &= u^4v^4 + u^4s^4 + v^4s^4 + \frac{2q}{64} \times (-\frac{p}{2}) \\ B^2 + \frac{q^2p}{64} &= u^4v^4 + u^4s^4 + v^4s^4 \end{aligned} \tag{4.25}$$

จากสมการที่ (4.17) จะได้ว่า

$$uvs = -\frac{q}{8} \Longrightarrow u^4v^4s^4 = (\frac{a}{8})^4 \tag{4.26}$$

และจากสมการที่ (4.24) , (4.25) และ (4.26) เราสามารถกำหนดพหุนามดีกรีสามที่มีค่าราก เป็น u^4 , v^4 และ s^4 และโดยการใช้วิธีการหาค่ารากของพหุนามดีกรีสามที่ได้กล่าวไปแล้ว เรา สามารถกำหนดพหุนามดีกรีสามได้ตามสมการด้านล่างนี้

$$\begin{aligned} N^3 + (u+v+s)N^2 + (uv+us+vs)N - (uvs) &= 0 \\ N^3 - (\frac{p^2}{8} + \frac{s}{2})N^2 + [(\frac{p^2}{16} + \frac{s}{4})^2 + \frac{q^2p}{64}]N - (\frac{q}{8})^4 &= 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

โดยที่ $N_1 = u^4, N_2 = v^4, N_3 = s^4$ และจะได้ว่า

$$x = \sqrt[4]{N_1} + \sqrt[4]{N_2} + \sqrt[4]{N_3}$$

ผู้อ่านสามารถอ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก [3]

ตัวอย่าง 4.2.1 [3] $x^4 + 8x + 4 = 0$

จะได้ว่า $a = 1, b = 0, c = 0, d = 8$ และ $e = 4$

กำหนดให้ $x = y - \dfrac{b}{4a}$ เราจะได้ $y^4 + +8x + 4 = 0$

จากสมการ (4.27) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N^3 - (\frac{p^2}{8} + \frac{s}{2})N^2 + [(\frac{p^2}{16} - \frac{s}{4})^2 + \frac{q^2p}{64}]N - (\frac{q}{8})^4 &= 0 \\ N^3 - 2N^2 + N - 1 &= 0 \end{aligned}$$

จากนั้นเราจะนำสมการ $N^3 - 2N^2 + N - 1$ ไปหาค่า N ในสูตรของพหุนามดีกรี 3

$$N_1 = 1.7549$$

$$N_2 = 0.1226 + 0.757i$$

$$N_3 = 0.1226 - 0.757i$$

เนื่องจาก $N_1 = u^4, N_2 = v^4$ และ $N_3 = s^4$ ดังนั้น

$$u^4 = 1.7549$$
$$v^4 = 0.1226 + 0.757i$$
$$s^4 = 0.1226 - 0.757i$$

จากนั้นแปลงให้อยู่ในรูปของพิกัดเชิงขั้วและใช้สูตรของเดอมัวร์ในการหารากที่ 2 ของจำนวนดังกล่าว นำค่าที่ได้ไปตรวจสอบเงื่อนไข (4.19)

$$u^2 = 1.3247, -1.3247$$
$$v^2 = 0.6624 + 0.5621i, 0.6624 + 0 - 5621i$$
$$s^2 = 0.6624 - 0.5621i, 0.6624 + 0.5621i$$

นำค่าที่ได้ไปแทนค่าในสมการ (4.19) เพื่อให้สอดคล้องกัน
จะได้ว่า

$$u^2 = 1.3247$$
$$v^2 = -0.6224 - 0.5621i$$
$$s^2 = -0.6224 - 0.5621i$$

หาค่ารากครั้งที่สองโดยใช้สูตรของเดอมัวร์เช่นเดียวกันกับครั้งแรก

$$u = 1.15095, -1.15095$$
$$v = 0.3210 + 0.8749i, -0.3210 - 0.8749$$
$$s = 0.31210 - 0.8749, -0.31210 + 8.749i$$

จาก $x = u + v + s$ เราจะได้ค่าจากการบวกสามจำนวนโดยสามารถจับคู่บวกกันได้ทั้งหมด และนำค่าเหล่านั้นไปแทนค่าในสมการ $y = x - \dfrac{b}{4a}$ เนื่องจากโจทย์ของตัวอย่าง $b = 0$ จะได้ว่า $y = x$ เราจะได้ค่า x ทั้ง 4 จำนวน ได้แก่

$$x_1 = -1.7929$$
$$x_2 = -0.5081$$
$$x_3 = 1.1510 + 1.75i$$
$$x_4 = 1.1510 - 1.75i$$

$\square$

บทที่ 5
รากของพหุนามดีกรี 4 และการประยุกต์ใช้

ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร มิติ 2×2 และ $b \in \mathbb{R}^2$
กำหนดให้ $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยสำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (x-b)^T A(x-b) \\ &= (x_1-b_1)^2\lambda_1 + (x_2-b_2)^2\lambda_2\end{aligned}$$

พิจารณาหาค่าสูงสุดและต่ำสุดภายใต้ x สอดคล้องเงื่อนไข $x_1^2 x_2^2 \leqq 1$
จาก***บทตั้ง 3.4 [5]*** *สเปกตรัมของ* (A,b) *ได้กล่าวว่า ค่าของจำนวนจริงที่ทำให้ฟังก์ชัน ของจำนวนจริง*

$$g(\Lambda) = \frac{\lambda_1^2|b_1^2|}{(\lambda_1-\Lambda)^2} + \frac{\lambda_2^2|b_2^2|}{(\lambda_2-\Lambda)^2} = 1 \tag{5.1}$$

และค่าลักษณะเฉพาะของ A ซึ่งทำให้ $g(\lambda_k) \leq 1$ ในกรณีเฉพาะ
เราจะนิยามว่า $(0/0 = 0, 1/0 = \infty)$
จาก (5.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\Lambda^4 - 2(\lambda_2+\lambda_1)\Lambda^3 + (\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^2 - \lambda_1^2 b_1^2 - \lambda_2^2 b_2^2)\Lambda^2 - \\ 2(\lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1^2 b_1^2\lambda_2 - \lambda_2^2 b_2^2\lambda_1)\Lambda + (1-b_1^2-b_2^2)\lambda_1^2\lambda_2^2 &= 0\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถหาค่า Λ โดยการหาค่ารากของพหุนามดีกรี 4
รูปแบบของสมการพหุนามดีกรี 4 คือ

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}a &= 1 \\ b &= 2(\lambda_2+\lambda_1) \\ c &= (\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^2 - \lambda_1^2 b_1^2 \lambda_2^2 b_2^2) \\ d &= 2(\lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1^2 b_1^2\lambda_2 - \lambda_2^2 b_2^2\lambda_1) \\ e &= (1-b_1^2-b_2^2)\lambda_1^2\lambda_2^2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

โดย $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยสำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$$

พิจารณาหาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของ A
ให้ λ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 1, 2$
พิจารณา $\lambda = 1$ จาก $(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = t$ และ $x_2 = 0$

$$E(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}$$

พิจารณา $\lambda = 2$ จาก $(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $-x_1 = 0$ และ $x_2 = t$

$$E(\mathbf{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ต่อไปหา b_1, b_2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $b_1 = 1$, $b_2 = 1$

จาก

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i)^2 \lambda_i$$

และจาก บทตั้ง 3.4 สามารถพิจารณาหาค่าสเปกตรัมได้จาก

$$g(\Lambda) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_1^2 b_i^2}{(\lambda_i - \Lambda)^2} = 1$$

จะได้ว่า

$$\Lambda^4 - 6\Lambda^3 + 8\Lambda^2 - 4 \;=\; 0$$

จากรูปแบบของพหุนามดีกรีสี่

$$\Lambda^4 - 6\Lambda^3 + 8\Lambda^2 - 4 = 0$$

จะได้ว่า p = -5.5 , q = -3 และ s = -1.1875 จาก (5.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N^3 - (\frac{p}{8} + \frac{s}{2})N^2 + [(\frac{p}{16} - \frac{s}{4})^2 + \frac{q^2 p}{64}]N - (\frac{q}{8})^4 &= 0 \\ N^3 - 3.1875N^2 + 4.01171875N - 0.019775390625 &= 0 \end{aligned}$$

จากรูปแบบของพหุนามดีกรีสาม

$$N^3 - 3.1875N^2 + 4.01171875N - 0.019775390625$$

โดยที่ p = 0.625 และ q = 1.84375

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ซึ่งเราจะได้ค่า N ได้แก่

$$\begin{aligned} N_1 &\approx 0.00495 \\ N_2 &\approx 1.59129 + 1.20988i \\ N_3 &\approx 1.59129 - 1.20988i \end{aligned}$$

หาค่ารากที่ 4

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{N_1} &\approx 0.26532, \\ &\quad -0.26532 \\ \sqrt[4]{N_2} &\approx 1.17339 + 0.192394i, \\ &\quad -1.17339 - 0.192394i \\ \sqrt[4]{N_3} &\approx 1.17339 - 0.192394i, \\ &\quad -1.17339 + 0.192394i \end{aligned}$$

จาก $x = u + v + s$ โดยที่ $u^4 = N_1, v^4 = N_2$ และ $s^4 = N_3$
จะได้ค่า Λ เป็น

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -0.58155 \\ \Lambda_2 &= 4.1120 \\ \Lambda_3 &= 1.23477 - 0.38479i \\ \Lambda_4 &= 1.23477 + 0.38479i \end{aligned}$$

จากการแก้สมการ เราเลือกค่าที่เป็นจำนวนจริง ได้แก่ $\Lambda_1 = -0.58155$ และ $\Lambda_2 = 4.1120$
พิจารณา $\Lambda_1 = -0.58155$

$$\begin{aligned} x_1^{\Lambda_1} &= 0.3008 \\ x_2^{\Lambda_1} &= 0.6002 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x_1^{\Lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.3008 \\ 0.6002 \end{bmatrix}$$

ต่อไปพิจารณา $\Lambda_2 = 4.1120$

$$\begin{aligned} x_1^{\Lambda_1} &= 0.1033 \\ x_2^{\Lambda_1} &= 0.4130 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x_2^{\Lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.1033 \\ 0.4130 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ สเปกตรัมหาได้จากจำนวนจริง คือ -0.58155 และ 4.1120
และจากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Phi x^{\Lambda_1} &= 0.2367 \\ \Phi x^{\Lambda_2} &= 9.3273 \end{aligned}$$

ดังนั้น 0.2367 < 9.3273
เนื่องจาก $max_i \lambda_i = 2 > 0$ และ $\Sigma_{\lambda_i<0|b_i|^2} = 1 \leq 1$
ในทำนองเดียวกัน $min_i \lambda_i = 1 > 0$ และ $\Sigma_{\lambda_i>0|b_i|^2} = 1 \leq 1$
นั่นคือ ค่าสูงสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น 9.3273 และค่าต่ำสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น 0.2367 $\square$

ตัวอย่าง 5.2 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

โดย $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยสำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\Phi(x) = (x-b)^T A(x-b)$$

พิจารณาหาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของ A
ให้ λ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(5-\lambda)(2-\lambda)-4&=0\\ \lambda^2-7\lambda+6&=0\\ (\lambda-6)(\lambda-1)&=0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lambda = 1, 6$

พิจารณา $\lambda = 1$ จาก $(A-\lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 5-1 & -2 \\ -2 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = 2t$ และ $x_2 = t$

$$E(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}$$

พิจารณา $\lambda = 6$ จาก $(A-\lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 5-6 & -2 \\ -2 & 2-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = t$ และ $x_2 = -2t$

$$E(\mathbf{2}) = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ต่อไปหา b_1, b_2

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \mathbf{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (-\mathbf{1}) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $b_1 = 2$, $b_2 = -1$

จาก

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i)^2 \lambda_i$$

และจากบทตั้ง 3.4 สามารถพิจารณาหาค่าสเปกตรัมได้จาก

$$g(\Lambda) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_1^2 b_i^2}{(\lambda_i - \Lambda)^2} = 1$$

จะได้ว่า

$$\Lambda^4 - 14\Lambda^3 + 23\Lambda^2 + 12\Lambda - 72 \ = \ 0$$

จากรูปแบบของพหุนามดีกรีสี่

$$\Lambda^4 - 14\Lambda^3 + 23\Lambda^2 + 12\Lambda - 72 = 0$$

จะได้ว่า p = -50.5 , q = -170 และ s = -198.4375

จาก (5.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N^3 - (\frac{p}{8} + \frac{s}{2})N^2 + [(\frac{p}{16} - \frac{s}{4})^2 + \frac{q^2 q}{64}]N - (\frac{q}{8})^4 &= 0 \\ N^3 - 219.5625N^2 + 20877.09375N - 203908.69140625 &= 0 \end{aligned}$$

จากรูปแบบของพหุนามดีกรีสาม

$$N^3 - 219.5625N^2 + 20877.09375N - 203908.69140625$$

จะได้ว่า p = 4807.86328125 และ q = 539989.07080078125

จาก

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ซึ่งเราจะได้ค่า N ได้แก่

$$\begin{aligned} N_1 &\approx 10.9695 \\ N_2 &\approx 104.298 + 87.8134i \\ N_3 &\approx 104.298 - 87.8134i \end{aligned}$$

หาค่ารากที่ 4

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{N_1} &\approx 1.8199, \\ & \quad -1.8199 \\ \sqrt[4]{N_2} &\approx 3.36495 + 0.5948i, \\ & \quad -3.36495 - 0.5948i \\ \sqrt[4]{N_3} &\approx -3.36495 + 0.5948i, \\ & \quad 3.36495 - 0.5948i \end{aligned}$$

จาก $x = u + v + s$ โดยที่ $u^4 = N_1, v^4 = N_2$ และ $s^4 = N_3$ จะได้ค่า Λ เป็น

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -1.4100 \\ \Lambda_2 &= 12.050 \\ \Lambda_3 &= 1.6801 - 1.1896i \\ \Lambda_4 &= 1.6801 + 1.1896i \end{aligned}$$

จากการแก้สมการ เราเลือกที่เป็นจำนวนจริง ได้แก่ $\Lambda_1 = -1.4100$ และ $\Lambda_2 = 12.050$
พิจารณา $\Lambda_1 = -1.4100$

$$\begin{aligned} x_1^{\Lambda_1} &= 0.6876 \\ x_2^{\Lambda_1} &= 0.6548 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x_1^{\Lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.6876 \\ 0.6548 \end{bmatrix}$$

ต่อไปพิจารณา $\Lambda_2 = 12.050$

$$\begin{aligned} x_1^{\Lambda_1} &= 0.0328 \\ x_2^{\Lambda_1} &= 0.1093 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x_2^{\Lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.0328 \\ 0.1093 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ สเปกตรัมหาได้จากจำนวนจริง คือ -1.4100 และ 12.050
และจากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Phi x^{\Lambda_1} &= 2.0719 \\ \Phi x^{\Lambda_1} &= 28.3624 \end{aligned}$$

ดังนั้น 2.0719 < 28.3624
เนื่องจาก $max_i \lambda_i = 6 > 0$ และ $\Sigma_{\lambda_i < 0 |b_i|^2} = 1 \leq 1$
ในทำนองเดียวกัน $min_i \lambda_i = 1 > 0$ และ $\Sigma_{\lambda_i > 0 |b_i|^2} = 1 \leq 1$
นั่นคือ ค่าสูงสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น 28.3624 และ ค่าต่ำสุดของ $\Phi(x)$ มีค่าเป็น 2.0719 $\square$

บรรณานุกรม

[1] ก่อสุข วีระถาวร **ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน** มหาวิทยาลัยรามคำแหง 2556

[2] มานพ ชัยดิเรก **พีชคณิตเชิงเส้น** ชลบุรีการพิมพ์ 2542

[3] Amir Fathi, Nastaran Sharifan. **A Classic New Method to Solve Quartic Equations**, Applied and Computational Mathematics. Val.2, No.2, 2013, pp.24-27.

[4] Erwin Kreyszig (1978). **Introductory Functional Analysis with Applications**, John wiley and Sons, New York.

[5] E. Spjotvoll (1972). **A note on a theorem of Forsythe and Golub**, SIAM J. Appl. Mppl. Math. 3 rd edition. 23, PP. 307-311.

[6] Dimitri P. Bertsekas (2003), N**onlinear Programming**, massachusetts Institute of Technology.

[7] George E. FORSYTHE and GENE H. GOLUE (1965), **ON The Stationary values of a second-degree polynomial on the unit sphere**, J. Soc. Indust. Appl.Math, Vol.13, No.4, PP. 1050-1068.

[8] E. Spjotvoll (1972). **A note on a theorem of Forsythe and Golub**, SIAM J. Appl. Mppl. Math. 3 rd edition. 23, PP. 307-311.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

A Note on a Theorem of Forsythe and Golub
Author(s): Emil Spjotvoll
Source: *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 23, No. 3 (Nov., 1972), pp. 307-311
Published by: Society for Industrial and Applied Mathematics
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2099994
Accessed: 13-07-2016 04:12 UTC

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at
http://about.jstor.org/terms

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Society for Industrial and Applied Mathematics is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *SIAM Journal on Applied Mathematics*

This content downloaded from 202.28.24.206 on Wed, 13 Jul 2016 04:12:05 UTC
All use subject to http://about.jstor.org/terms

SIAM J. APPL. MATH.
Vol. 23, No. 3, November 1972

A NOTE ON A THEOREM OF FORSYTHE AND GOLUB*

EMIL SPJØTVOLL†

Abstract. Forsythe and Golub (1965) proved a theorem about all stationary points of the function $\Phi(x) = (x - b)^H A(x - b)$ for x on the sphere $x^H x = 1$. The same theorem is proved using much simpler methods. It is also shown how the result can be used to find the minimum and maximum of $\Phi(x)$ for $x^H x \leqq 1$. It turns out that, with a few exceptions, the minimum and maximum occur on the boundary $x^H x = 1$.

1. Introduction. Let A be a Hermitian square matrix of complex elements and order n. Let b be a known n-vector of complex numbers. For each complex n-vector x, the nonhomogeneous quadratic expression

$$\Phi(x) = (x - b)^H A(x - b) \tag{1.1}$$

(H denotes complex conjugate transpose) is a real number. Consider the problems

$$\text{find all } x \text{ which make } \Phi(x) \text{ stationary for } x^H x = 1 \tag{1.2}$$

and

$$\text{find the minimum and maximum of } \Phi(x) \text{ for } x^H x \leqq 1. \tag{1.3}$$

The solution to the problem (1.2) can be found in a paper by Forsythe and Golub (1965). Since their proof is rather lengthy it is one of the aims of this paper to give a simpler proof. We shall also use the solution of (1.2) to solve the problem (1.3).

The problems (1.2) and (1.3) appear in many situations in statistics; see, e.g., Draper (1963) and Spjøtvoll (1971). For other examples see the references of Forsythe and Golub (1965).

2. The problem (1.2). By using the Lagrange multiplier rule to find stationary values of

$$(x - b)^H A(x - b) - \lambda x^H x,$$

one obtains the following lemma.

LEMMA 1. *A vector x satisfying $x^H x = 1$ renders $\Phi(x)$ stationary if and only if there exists a real number $\lambda = \lambda(x)$ such that*

$$A(x - b) = \lambda x, \tag{2.1}$$

$$x^H x = 1. \tag{2.2}$$

To see why λ is real, consult the paper of Forsythe and Golub. Following Forsythe and Golub we introduce the following definition.

DEFINITION. By the *spectrum* of the pair (A, b) we mean the set of all real λ for which there exists an x such that (2.1) and (2.2) are satisfied, i.e., such that $\Phi(x)$ is stationary at x.

* Received by the editors October 7, 1971.

† Institute of Mathematics, University of Oslo, Blindern, Oslo 3, Norway.

This content downloaded from 202.28.24.206 on Wed, 13 Jul 2016 04:12:05 UTC
All use subject to http://about.jstor.org/terms

Given any λ, x satisfying (2.1) and (2.2), we shall say that x belongs to λ and frequently write x in the form x^λ.

Let $\lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$ be the (necessarily real) eigenvalues of A, and let $\{u_1, \cdots, u_n\}$ be a corresponding real orthonormal set of eigenvectors with $Au_i = \lambda_i u_i$, $i = 1, \cdots, n$. Let $b = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ and $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$. Then

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i - b_i|^2 \tag{2.3}$$

and (2.1) is equivalent to

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda) x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i u_i. \tag{2.4}$$

LEMMA 2. *The spectrum consists of all real* λ *such that*

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda)^2} = 1 \qquad (0/0 = 0,\ 1/0 = \infty), \tag{2.5}$$

together with each eigenvalue λ_k *of* A *for which* $g(\lambda_k) < 1$.

Proof. It follows from (2.4) that we must have

$$(\lambda_i - \lambda) x_i = \lambda_i b_i, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{2.6}$$

Define the set I by $I = \{i : \lambda_i b_i = 0\}$. From (2.6) we obtain

$$x_i = \frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i - \lambda}, \qquad i \notin I, \tag{2.7}$$

$$(\lambda_i - \lambda) x_i = 0, \qquad i \in I. \tag{2.8}$$

A value $\lambda \in \{\lambda_i : i \notin I\}$ cannot be in the spectrum since then (2.6) would read $0 = \lambda_i b_i$, which is a contradiction since $\lambda_i b_i \neq 0$.

Let $\lambda \notin \{\lambda_i : i = 1, \cdots, n\}$. Then we get from (2.7) and (2.8):

$$x_i^\lambda = \frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i - \lambda}, \qquad i \notin I, \tag{2.9}$$

$$x_i^\lambda = 0, \qquad i \in I. \tag{2.10}$$

Then λ belongs to the spectrum if and only if the side condition

$$(x^\lambda)^H x^\lambda = \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda)^2} = 1 \tag{2.11}$$

is satisfied. Hence all $\lambda \notin \{\lambda_i : i = 1, \cdots, n\}$ satisfying (2.5) belong to the spectrum.

Finally, let $\lambda = \lambda_j$ for some $j \in I$. Let $I(\lambda_j) = \{i : \lambda_i = \lambda_j\}$. If $I(\lambda_j) \cap \{i : \lambda_i b_i \neq 0\}$ is not empty, then $\lambda_j \in \{\lambda_i : i \notin I\}$ and λ_j is, as shown above, not in the spectrum. If not, $I(\lambda_j) \subset I$. In that case we get

$$x_i^{\lambda_j} = \frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i - \lambda_j}, \qquad i \notin I, \tag{2.12}$$

$$x_i^{\lambda_j} = 0, \qquad i \in I - I(\lambda_j), \tag{2.13}$$

$$x_i^{\lambda_j} \text{ arbitrary}, \qquad i \in I(\lambda_j). \tag{2.14}$$

This content downloaded from 202.28.24.206 on Wed, 13 Jul 2016 04:12:05 UTC
All use subject to http://about.jstor.org/terms

The side condition is satisfied if

$$\sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} + \sum_{i \in I(\lambda_j)} |x_i^{\lambda_j}|^2 = 1. \tag{2.15}$$

This is possible if and only if

$$\sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} \leqq 1.$$

Hence, noting that $\lambda \in \{\lambda_i : i \notin I\}$ cannot satisfy (2.5), the lemma is proved.

THEOREM 1. *Let the spectrum of* (A, b) *consist of the numbers* $\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_p\}$, *with* $\Lambda_1 < \cdots < \Lambda_p$. *Then*

$$\Phi(x^{\Lambda_j}) = \Lambda_j + \Lambda_j \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|^2}{\Lambda_j - \lambda_i} \tag{2.16}$$

and

$$\Phi(x^{\Lambda_1}) < \cdots < \Phi(x^{\Lambda_p}).$$

Proof. We have

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i - b_i|^2.$$

In the case when x^λ is given by (2.9) and (2.10), we get

$$\Phi(x^\lambda) = \lambda^2 \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda)^2} = \lambda + \lambda \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|^2}{\lambda - \lambda_i}, \tag{2.17}$$

where we have used (2.11) to obtain the second equality.

Then consider the case when x^λ is given by (2.12), (2.13) and (2.14). From (2.15) we get

$$\sum_{i \in I(\lambda_j)} |x_i^{\lambda_j}|^2 = 1 - \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2}. \tag{2.18}$$

Using (2.13) we get

$$\Phi(x^{\lambda_j}) = \sum_{i \notin I} \lambda_i |x_i^{\lambda_j} - b_i|^2 + \lambda_j \sum_{i \in I(\lambda_j)} |x_i^{\lambda_j} - b_i|^2.$$

If $\lambda_j = 0$, then $\Phi(x^{\lambda_j})$ is given by (2.17) with $\lambda = \lambda_j$. If $\lambda_j \neq 0$, then $b_i = 0$ when $i \in I(\lambda_j)$, and using (2.12) and (2.18) we obtain

$$\begin{aligned}
\Phi(x^{\lambda_j}) &= \lambda_j^2 \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} + \lambda_j \sum_{i \in I(\lambda_j)} |x_i^{\lambda_j}|^2 \\
&= \lambda_j^2 \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} + \lambda_j \left(1 - \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2}\right) \\
&= \lambda_j + \lambda_j \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|^2}{\lambda_j - \lambda_i}.
\end{aligned}$$

Hence in each case $\Phi(x^\lambda)$ is given by (2.16).

This content downloaded from 202.28.24.206 on Wed, 13 Jul 2016 04:12:05 UTC
All use subject to http://about.jstor.org/terms

Finally, let $\Lambda_j < \Lambda_k$, and consider the difference

$$\Phi(x^{\Lambda_k}) - \Phi(x^{\Lambda_j}) = (\Lambda_k - \Lambda_j)\left(1 - \sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\Lambda_k - \lambda_i)(\Lambda_j - \lambda_i)}\right). \tag{2.19}$$

By Schwarz's inequality and (2.11) and (2.15) we get

$$\sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i |b_i|}{\Lambda_k - \lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i |b_i|}{\Lambda_j - \lambda_i} \leqq \sqrt{\left(\sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\Lambda_k - \lambda_i)^2}\right)\left(\sum_{i \notin I} \frac{\lambda_i^2 |b_i|^2}{(\Lambda_j - \lambda_i)^2}\right)} \leqq 1. \tag{2.20}$$

Equality obtains in (2.20) if and only if $x^{\Lambda_k} = x^{\Lambda_j}$, which is impossible. Hence from (2.19) and (2.20), $\Phi(x^{\Lambda_k}) - \Phi(x^{\Lambda_j}) > 0$. The theorem is proved.

3. The problem (1.3). We have this result.

THEOREM 2. *The maximum of* $\Phi(x)$ *is* 0 *if* $\max_i \lambda_i \leqq 0$ *and* $\sum_{\lambda_i < 0} |b_i|^2 \leqq 1$. *The minimum of* $\Phi(x)$ *is* 0 *if* $\min_i \lambda_i \geqq 0$ *and* $\sum_{\lambda_i < 0} |b_i|^2 \leqq 1$. *Otherwise the maximum and minimum of* $\Phi(x)$ *are* $\Phi(x^{\Lambda_p})$ *and* $\Phi(x^{\Lambda_1})$, *where* $\Phi(x^{\Lambda})$ *is given in Theorem* 1.

Proof. Consider the problem of finding the maximum (the problem of finding the minimum can be treated analogously). First suppose that $\lambda_n = \max_i \lambda_i > 0$. We shall show that the maximum of $\Phi(x)$ is attained for some x on the boundary $x^H x = 1$. Suppose that y is such that $y^H y < 1$. For such a y define an x by $x_i = y_i, i = 1, \cdots, n - 1$, and $x_n = -kb_n$, where $k > 0$ is a real number such that

$$\sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2 + k^2 |b_n|^2 = 1.$$

Since $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 < 1$, we must have $k|b_n| > |y_n|$. Using (2.3) we get

$$\begin{aligned}
\Phi(x) - \Phi(y) &= \lambda_n((k + 1)^2 |b_n|^2 - |y_n - b_n|^2) \\
&\geqq \lambda_n((k + 1)^2 |b_n|^2 - (|y_n| + |b_n|)^2) \\
&> \lambda_n((k + 1)^2 |b_n|^2 - (k|b_n| + |b_n|)^2) = 0.
\end{aligned}$$

It follows that the maximum is attained for some x satisfying $x^H x = 1$. By Theorem 1 it must be $\Phi(x^{\Lambda_p})$.

Next, suppose that $\lambda_n \leqq 0$. By (2.3), $\Phi(x)$ is then always less than or equal to 0. It is equal to 0 if and only if $x_i = b_i, i \in \{i : \lambda_i < 0\}$. Such a choice of x is possible if and only if $\sum_{\lambda_i < 0} |b_i|^2 \leqq 1$. This is the first result in the theorem.

Finally, consider the case when $\lambda_n \leqq 0$ and $\sum_{\lambda_i < 0} |b_i|^2 > 1$. Clearly, the maximum of $\Phi(x)$ is obtained by choosing x_i in the same direction as b_i. Since $\sum_{\lambda_i < 0} |b_i|^2 > 1$, we cannot choose $x_i = b_i$ for all i with $\lambda_i < 0$, but $\Phi(x)$ will be made as large as possible if we choose $|x_i|$ as close to $|b_i|$ as possible; hence the maximum is obtained for a point with $\sum_{\lambda_i < 0} |x_i|^2 = 1$ and $x_i = 0$, $i \notin \{i : \lambda_i < 0\}$. Since the maximum is attained for some value with $x^H x = 1$, it is, by Theorem 1, equal to $\Phi(x^{\Lambda_p})$.

Remark 1. In the statistical problems mentioned in the Introduction, one is interested in $\Phi(x)$ only for real x satisfying $x'x = 1$ (or $x'x \leqq 1$). Since b also is real in those problems, it is seen from this section and the previous section that the stationary values x^{λ} are also real. Hence the solutions to these problems are also obtained from Theorems 1 and 2.

This content downloaded from 202.28.24.206 on Wed, 13 Jul 2016 04:12:05 UTC
All use subject to http://about.jstor.org/terms

Remark 2. In Draper (1963) the situations corresponding to $\lambda_i b_i = 0$ in Theorem 1 seem to have disappeared. In Draper's problem, however, the matrix A and the vector b are random and the probability is 0 of having $\lambda_i b_i = 0$.

REFERENCES

[1] NORMAN R. DRAPER, *"Ridge analysis" of response surfaces*, Technometrics, 5 (1963), pp. 469–479.
[2] GEORGE E. FORSYTHE AND GENE H. GOLUB, *On the stationary values of a second-degree polynomial on the unit sphere*, this Journal, 13 (1965), pp. 1050–1068.
[3] EMIL SPØTVOLL, *Multiple comparison of regression functions*, Ann. Math. Statist., to appear.

This content downloaded from 202.28.24.206 on Wed, 13 Jul 2016 04:12:05 UTC
All use subject to http://about.jstor.org/terms

ภาคผนวก ข

Applied and Computational Mathematics
2013; 2(2) : 24-27
Published online April 2, 2013 (http://www.sciencepublishinggroup.com/j/acm)
doi: 10.11648/j.acm.20130202.11

A classic new method to solve quartic equations

Amir Fathi*, **Nastaran Sharifan**

Department of Electrical Engineering, Urmia branch, Islamic Azad University, Urmia, Iran
Department of law, Varamin-Pishva branch, Islamic Azad University, Varamin, Pishva, Iran

Email address:
fathi.amir@hotmail.com (A. Fathi), sharifan.nastaran@hotmail.com (N. Sharifan)

To cite this article:
Amir Fathi, Nastaran Sharifan. A Classic New Method to Solve Quartic Equations, *Applied and Computational Mathematics*. Vol. 2, No. 2, 2013, pp. 24-27. doi: 10.11648/j.acm.20130202.11

Abstract: Polynomials of high degrees often appear in many problems such as optimization problems. Equations of the fourth degree or so called quartics are one type of these polynomials. In this paper we give a new Classic method for solving a fourth degree polynomial equation (Quartic). We will show how the quartic formula can be presented easily at the precalculus level.

Keywords: Fourth Degree Polynomial, Quartic Equation

1. Introduction

Linear and quadratic equations are members of a class of equations, called polynomial equations. These equations have the general form of:

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x + a_0 = 0$$

In which x is a variable and $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ are given constants. Also n must be a positive integer and $a_n \neq 0$.

Lodovico Ferrari is attributed with the discovery of the solution to the quartic in 1540, but since this solution, like all algebraic solutions of the quartic, requires the solution of a cubic to be found, it couldn't be published immediately[3]. The solution of the quartic was published together with that of the cubic by Ferrari's mentor Gerolamo Cardano in the book *Ars Magna* (1545).

Polynomials of high degrees often appear in problems involving optimization, and sometimes these polynomials happen to be quartics, but this is a coincidence. It is shown that any degree-n polynomial with rational (or real, or complex) coefficients has n complex roots. (This fact is called the fundamental theorem of algebra.) So, if we have a quadratic formula for finding both (possibly complex) roots of a quadratic (degree-2) polynomial, then it's natural to ask for a formula for all three roots of a cubic. Likewise, we would like a formula for all four roots of a quartic, and so on. It can be proved (the terms are Galois Theory and solvable groups), that there cannot exist a general formula for degree 5 and above.

In this paper we proposed a new Classic method for solving fourth degree polynomials (Quadratics) and the purpose of this paper is to show how the quartic formula can be presented easily at the precalculus level. We show how to verify that the formula is correct, and we identify when it is profitable to use it.

2. Solving Cubic Polynomials

If we are given a cubic equation in the form of $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ and need to solve for y, then the first thing we do is substitute variables. Replacing eq.1 in the given formula above,

$$y = x - \frac{b}{3a} \tag{1}$$

We will get something in the form of:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2}$$

Which is the depressed cubic equation, Where

$$\begin{cases} p = -\dfrac{b^2}{3a^2} + \dfrac{c}{a} \\ q = \dfrac{2b3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a}. \end{cases} \tag{3}$$

And replacing $x = u + v$ in the eq.2 leads to eq.4.

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \tag{4}$$

This equation is changed to two equations with two unknown quantities that:

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3} \Rightarrow u^3 \times v^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{5}$$

By defining quadratic equation that the roots are u^3 and v^3, u and v can be computed.

$$x^2-(u^3+v^3)x+u^3v^3=0 \tag{6}$$

$$x^2+qx-\frac{p^3}{27}=0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} u=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \\ v=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \end{cases} \tag{7}$$

$$x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{8}$$

3. Solving Fourth Degree Polynomials (Quartics)

The general quartic equation is:

$$ay^4+by^3+cy^2+dy+e=0 \ .$$

Just as with the cubic, it behooves us to get rid of the second-highest term (in this case the cubed term) by making a substitution of variables. (To use the quadratic formula, you just plug in your coefficients). To solve Quadratic equations new method in this paper are proposed as follows:

Step1. The general quartic equation is:

$$ay^4+by^3+cy^2+dy+e=0.$$

It turns out that it is desirable to get rid of one of the coefficients. To accomplish this, substitute

$$y=x-\frac{b}{4a} \tag{9}$$

Now that we've eliminated the cubic term, we have something of the form

$$x^4+px^2+qx+s=0. \tag{10}$$

Where p, q and s are:

$$\begin{cases} p=-\dfrac{3b^2}{8a^2}+\dfrac{c}{a} \\ q=\dfrac{b^3}{8a^3}-\dfrac{bc}{2a^2}+\dfrac{d}{a} \\ s=-\dfrac{3b^4}{256a^4}+\dfrac{b^2c}{16a^3}-\dfrac{bd}{4a^2}+\dfrac{e}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{p}=-\dfrac{3\mathrm{b}^2}{8\mathrm{a}^2}+\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} \\ \mathrm{q}=\dfrac{\mathrm{b}^3}{8\mathrm{a}^3}-\dfrac{\mathrm{bc}}{2\mathrm{a}^2}+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}} \\ \mathrm{s}=-\dfrac{3\mathrm{b}^4}{256\mathrm{a}^4}+\dfrac{\mathrm{b}^2\mathrm{c}}{16\mathrm{a}^3}-\dfrac{\mathrm{bd}}{4\mathrm{a}^2}+ \end{cases}$$

(11)

Step2. With replacing $x=u+v+s$:

$$(u+v+s)^4+p(u+v+s)^2+ \\ q(u+v+s)+s=0 \tag{12}$$

$$u^4+4u^3(v+s)+6u^2(v+s)^2 \\ +4u(v+s)^3+(v+s)^4+p(u^2+v^2+s^2)+ \\ 2p(uv+us+vs)+q(u+v+s)+s=0$$

$$u^4+v^4+s^4+4v^3s+4vs^3+6v^2s^2+ \\ 4u^3s+6u^2s^2+12uv^2s+6u^2v^2+4uv^3 \\ +12u^2vs+4us^3+12uvs^2+4u^3v+ \\ p(u^2+v^2+s^2)+2p(uv+us+vs)+ \\ q(u+v+s)+s=0 \tag{13}$$

$$u^4+v^4+s^4+4v^3s+4vs^3+4u^3v+4u^3s+ \\ 4uv^3+4us^3+6u^2v^2+6u^2s^2+6v^2s^2+ \\ 8uvs^2+4uvs^2+8uv^2s+4uv^2s+8u^2vs+ \\ 4u^2vs+p(u^2+v^2+s^2)+2p(uv+us+vs)+ \\ q(u+v+s)+s=0 \tag{14}$$

Step3. This equation is changed to three equations with three unknown quantities, only under this condition that the previous equation is satisfied.

$$8uvs^2+8uv^2s+8u^2vs+q(u+v+s)=0 \tag{15}$$

Firs equation is defined:

$$uvs=-\frac{q}{8} \tag{16}$$

Residue of the equation (14) is:

$$u^4+v^4+s^4+4(u^2+v^2+s^2)(uv+us+vs)+ \\ p(u^2+v^2+s^2)+2p(uv+us+vs)+s+ \\ 6(u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2)=0 \tag{17}$$

Second equation is defined as below:

$$4(u^2+v^2+s^2)(uv+us+vs)+2p(uv+us+vs)=0$$

$$(uv+us+vs)(4(u^2+v^2+s^2)+2p)=0 \rightarrow$$
$$(uv+us+vs)\neq 0 \Rightarrow$$

$$4(u^2+v^2+s^2)+2p=0 \rightarrow \qquad (18)$$
$$u^2+v^2+s^2=-p/2$$

Residue of the equation (17) is:

$$(u^4+v^4+s^4)-\frac{p^2}{2}+s+ \qquad (19)$$
$$6(u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2)=0$$

And:

$$u^2+v^2+s^2=-\frac{p}{2}\xrightarrow{\text{by squaring}}$$

$$(u^2+v^2+s^2)^2=(-\frac{p}{2})^2$$

$$u^4+v^4+s^4+$$

$$2(u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2)=\frac{p^2}{4}$$

$$\xrightarrow{if} u^4+v^4+s^4=A$$
$$u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2=B \Rightarrow \qquad (20)$$
$$A+2B=\frac{p^2}{4}$$

It is concluded from equation (19):

$$A+6B=\frac{p^2}{2}-s \qquad (21)$$

With solving the two equations with two unknown quantities that named (20) and (21) it is obtained:

$$B=\frac{p^2}{16}-\frac{s}{4}\Rightarrow$$
$$B=u^2v^2+u^2s^2+v^2s^2=\frac{p^2}{16}-\frac{s}{4} \qquad (22)$$
$$A=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{8}+\frac{s}{2}=\frac{p^2}{8}+\frac{s}{2}$$

$$\Rightarrow A=u^4+v^4+s^4=\frac{p^2}{8}+\frac{s}{2} \qquad (23)$$

By squaring the expression (22) we will have:

$$B^2=u^4v^4+u^4s^4+v^4s^4+2u^2v^2s^2(u^2+v^2+s^2)$$

$$B^2=u^4v^4+u^4s^4+v^4s^4+\frac{2q}{64}\times(-\frac{p}{2})$$

$$u^4v^4+u^4s^4+v^4s^4=B^2+\frac{q^2p}{64} \qquad (24)$$

From equation (16):

$$uvs=-\frac{q}{8}\Rightarrow u^4v^4s^4=(\frac{q}{8})^4 \qquad (25)$$

Using expressions (23), (24), and (25) we define a cubic equation such that roots are u^4, v^4 and s^4 and also three previous expressions are satisfied. Cubic equation is defined as below:

$$N^3-(u^4+v^4+s^4)N^2+(u^4v^4+u^4s^4+v^4s^4)N-$$
$$(u^4v^4s^4)=0$$

$$\Rightarrow N^3-(\frac{p^2}{8}+\frac{s}{2})N^2+[(\frac{p^2}{16}-\frac{s}{4})^2+ \qquad (26)$$
$$\frac{q^2p}{64}]N-(\frac{q}{8})^4=0$$

Naming the equation roots $N_1, N_2, N_3\,(u^4, v^4, s^4)$ respectively, this expression is concluded:

$$x=\sqrt[4]{N_1}+\sqrt[4]{N_2}+\sqrt[4]{N_3}$$

4. Examples

Find four roots of $x^4+8x+4=0$.
Solution:

$$x^4+8x+4=0\Rightarrow q=8, s=4, p=0$$

$$\Rightarrow A=2, B=-1$$

$$N^3-2N^2+N-1=0$$

$$N_1=1.7549\ \angle 0$$

$$N_2=0.1226+0.7449i=0.7549\angle 80.65$$

$$N_3=0.1226-0.7449i=0.7549\angle -80.65$$

With extracting the square root of N_1, N_2, N_3 (u4, v4, s4):

$$\sqrt{N_1}=1.3247\angle 0, 1.3247\angle 180 \longrightarrow 1.3247, -1.3247$$

$$\sqrt{N_2}=0.8688\angle 40.32, 0.8688\angle 220.3 \longrightarrow$$
$$0.6624+0.5621i, -0.6224-0.5619i$$

$$\sqrt{N_3} = 0.8688\angle -40.32, 0.8688\angle 139.67 \longrightarrow$$
$$0.6624 - 0.5622i, -0.6624 + 0.5622i$$

The roots which satisfy equation (18) are selected:

$$\sqrt{N_1} = 1.3247$$

$$\sqrt{N_2} = -0.6224 - 0.5619\ i$$

$$\sqrt{N_3} = -0.6624 + 0.5622$$

$$\sqrt[4]{N_1} = 0.3210 - 0.8749, -0.3210 + 0.8749\ i$$

$$\sqrt[4]{N_2} = 0.3210 + 0.8749i, -0.3210 - 0.8749i$$

$$\sqrt[4]{N_3} = 1.15095, -1.15095$$

The answers which satisfy equation (16) are selected:

$$x = u + v + s \Rightarrow$$

$$x_1 = -1.7929$$

$$x_2 = -0.5089$$
$$x_3 = 1.1510 + 1.75i$$
$$x_4 = 1.1510 - 1.75i$$

By using the second method we verify the following example.

5. Conclusions

The most important point in all of the methods for solving a quartic equation is the complexity of these solutions.

To prove the efficiency and simplicity of the proposed method an example quartic is given in the fourth section of the paper and it is solved with the proposed initiated method.

References

[1] "A Simple Method to Solve Quartic Equations" Amir Fathi, Pooya Mobadersany, Rahim Fathi, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 6(6): 331-336, 2012, ISSN 1991-8178.

[2] Cardano, Girolamo, (translated by T. Richard Witmer), Ars Magna or the Rules of Algebra, Dover, New York, NY, 1993.

[3] Faucette, W. M. "A Geometric Interpretation of the Solution of the General Quartic Polynomial." Amer. Math. Monthly 103, 51-57, 1996.

[4] Gellert, W.; Gottwald, S.; Hellwich, M.; Kästner, H.; and Künstner, H. (Eds.). VNR Concise Encyclopedia of Mathematics, 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1989.

[5] Hazewinkel, M. (Managing Ed.). Encyclopaedia of Mathematics: An Updated and Annotated Translation of the Soviet "Mathematical Encyclopaedia." Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1988.

[6] MathPages. "Reducing Quartics to Cubics." http://www.mathpages.com/home/kmath296.htm.

[7] Smith, D. E. A Source Book in Mathematics. New York: Dover, 1994.

[8] van der Waerden, B. L. §64 in Algebra, Vol. 1. New York: Springer-Verlag, 1993.

[9] Beyer, W. H. CRC Standard Mathematical Tables, 28th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, p. 12, 1987a.

[10] Beyer, W. H. Handbook of Mathematical Sciences, 6th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1987b.

[11] Birkhoff, G. and Mac Lane, S. A Survey of Modern Algebra, 5th ed. New York: Macmillan, pp. 107-108, 1996.

[12] Borwein, P. and Erdélyi, T. "Quartic Equations." §1.1.E.1e in Polynomials and Polynomial Inequalities. New York: Springer-Verlag, p. 4, 1995.

[13] Boyer, C. B. and Merzbach, U. C. A History of Mathematics, 2nd ed. New York: Wiley, pp. 286-287, 1991.

[14] I. Stewart, "Galois theory," ed: Chapman & Hall/CRC Mathematics, 2004.

[15] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, "Lodovico Ferrari," in The MacTutor History of Mathematics archive, ed. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews Scotland.

[16] AN EASY LOOK AT THE CUBIC FORMULA .Thomas J. Osler.Mathematics Department, Rowan University, Glassboro NJ 08028.

ประวัติผู้ศึกษาค้นคว้า

ชื่อ - สกุล	นางสาวภริดา ส่องแสงมณีเลิศ
วันเดือนปีที่เกิด	25 ธันวาคม พุทธศักราช 2537
ประวัติการศึกษา	ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนบ้านเข็กน้อย อำเภอเขาค้อ จังหวัดเพชรบูรณ์ ปีที่จบ 2553 มัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสวนเมี่ยงวิทยา อำเภอชาติตระการ จังหวัดพิษณุโลก ปีที่จบ 2556
ที่อยู่ปัจจุบัน	149 หมู่ 12 ตำบลเข็กน้อย อำเภอเขาค้อ จังหวัดเพชรบูรณ์
เบอร์ติดต่อ	090-1953596
อีเมล์	zeeree1110@gmail.com

ประวัติผู้ศึกษาค้นคว้า

ชื่อ - สกุล	นางสาวสุภัชญา กุณาธรรม
วันเดือนปีที่เกิด	24 มีนาคม พุทธศักราช 2538
ประวัติการศึกษา	ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนรัตนาเอื้อวิทยา อำเภอฝาง จังหวัดเชียงใหม่ ปีที่จบ 2553 มัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนรัตนาเอื้อวิทยา อำเภอฝาง จังหวัดเชียงใหม่ ปีที่จบ 2556
ที่อยู่ปัจจุบัน	89 หมู่ 4 ตำบลแม่สูน อำเภอฝาง จังหวัดเชียงใหม่
เบอร์ติดต่อ	098-7512526
อีเมล์	Skunatham@gmail.com