ทฤษฎีการลู่เข้าสู่ปัญหาค่าสมดุลและปัญหาจุดตรึงของการส่งของวงศ์ไม่จำกัดของการส่งแบบไม่ขยาย

วาสนา คำปิงยอด

การศึกษาอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

พฤษภาคม 2560

มหาวิทยาลัยพะเยา

คณะกรรมการสอบการศึกษาอิสระ อาจารย์ที่ปรึกษา และคณบดี คณะวิยาศาสตร์ได้พิจารณาการศึกษาเรื่อง "ทฤษฎีการลู่เข้าสู่ปัญหาค่าสมดุลและปัญหาจุดตรึงของวงศ์ไม่จำกัดของการส่งแบบไม่ขยาย" เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยพะเยา

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ประสิทธิ์ ช่อลำเจียก)

ประธานกรรมการ

....

(ดร.วัชรภรณ์ ช่อลำเจียก)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

....

(ดร.เอื้อมพร วิทยารัฐ)

กรรมการ

....

(รองศาสตราจารย์ปรียานันท์ แสนโภชน์)

คณบดีคณะวิยาศาสตร์

พฤษภาคม 2560

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาอิสระฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลืออนุเคราะห์และสนับสนุนจากหลายๆส่วนด้วยกัน

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ ดร.วัชรภรณ์ ช่อลำเจียก เป็นอย่างสูง อาจารย์ที่ปรึกษาที่คอยให้คำแนะนำ ที่เป็นประโยชน์ต่องานการศึกษาอิสระฉบับนี้เป็นอย่างมากตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องของงานการศึกษาอิสระและให้การดูแลด้านต่างๆเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ประสิทธิ์ ช่อลำเจียก
ดร. เอื้อมพร วิทยารัฐ ผู้เป็นคณะกรรมการสอบการศึกษาอิสระที่ได้ให้คำแนะนำและข้อเสนอแก่งานการศึกษาอิสระฉบับนี้

ขอขอบคุณอาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่คอยอบรมสั่งสอนดูแลเอาใจใส่ด้วยดีตลอดมา

ขอขอบพระคุณบิดามารดาญาติพี่น้อง ผู้ให้กำลังใจและการสนับสนุนอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนจบสมบูรณ์และตลอดการศึกษา

ขอขอบคุณเพื่อนๆนิสิตสาขาคณิตศาสตร์ทุกคน สำหรับความช่วยเหลือต่างๆและคอยเป็นกำลังใจให้กันตลอดมา

วาสนา คำปิงยอด

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตาราง **หน้า**

สารบัญภาพ

ภาพ **หน้า**

ชื่อเรื่อง	ทฤษฎีการลู่เข้าสู่ปัญหาค่าสมดุลและปัญหาจุดตรึงของ วงศ์ไม่จำกัดของการส่งแบบไม่ขยาย
ผู้ศึกษาค้นคว้า	นางสาววาสนา คำปิงยอด
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.วัชรภรณ์ ช่อลำเจียก
วิทยาศาสตรบัณฑิต	สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คำสำคัญ	ปริภูมิฮิลเบิร์ต การส่งไม่ขยาย ค่าสมดุล จุดตรึง ระเบียบวิธีการทำซ้ำ

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เราศึกษาระเบียบวิธีการทำซ้ำสำหรับการหาสมาชิกร่วมของเซตของปัญหาค่าสมดุลและการหาสมาชิกร่วมกันของจุดตรึงของการส่งไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต และศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างเข้มภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม นอกจากนี้เรายังยกตัวอย่างผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่อสนับสนุนทฤษฎีบทหลัก

Title	CONVERGENCE THEOREM FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS AND FIXED POINT PROBLEM OF INFINITE FAMILY OF NONEXPANSIVE MAPPINGS
Author	Miss Watsana Khampingyod
Advisor	Dr. Watcharaporn Cholamjiak
Bachelor of Science	Progarm in Mathmatics
Keywords	Hilbert space, Nonexpansive, Fixed point, Iteration

ABSTRACT

In this research, we study iterative scheme for finding a common element of the set of solutions of an equilibrium problem and the set of common fixed points of infinite nonexpansive mappings in a Hilbert space and also study the strong convergence theorem under mild assumptions. Finally, we give some numerical examples for supporting our main theorem.

บทที่ 1

บทนำ

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริงและให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ H ให้ $h: C \times C \to R$ เป็นฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุล

กำหนดปัญหาค่าสมดุล $EP(h)$ คือการหาสมาชิก $u \in C$ ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$h(u,v) \geq 0 \qquad \text{สำหรับทุก } v \in C \tag{1.1}$$

กำหนดเซตของคำตอบของ $EP(h)$ โดย $SEP(h)$ ปัญหานี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาจุดตรึง ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสม ปัญหาอสมการแปรผัน และปัญหาจุดสมดุลของแนชสามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิง $[1]$ มีบางวิธีการที่นำเสนอการแก้ปัญหาค่าสมดุล สามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิง$[2-4]$

เมื่อไม่นานมานี้ คอมเบทเต (Combettes) และเฮิร์สเตากา (Hirstoaga) $[2]$ ได้แนะนำกระบวนการทำซ้ำของการหาค่าประมาณที่ดีที่สุดของข้อมูลเบื้องต้น เมื่อ $SEP(h) \neq \varnothing$ และพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าอย่างเข้ม โดยมีแรงบันดาลใจมาจากแนวคิดของ คอมเบทเตและเฮิร์สเตากา เมื่อเร็วๆนี้ ทาคาฮาชิ (Takahashi) และทาคาฮาชิ (Takahashi) $[4]$ ได้แนะนำกระบวนการทำซ้ำแบบใหม่โดยวิธีการประมาณค่าสำหรับการหาสมาชิกร่วมของเซตของผลเฉลยของปัญหาค่าสมดุล และเซตของจุดตรึงของการส่งไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ผลขยายและปรับปรุงทฤษฎีของเขาครอบคลุมทฤษฎีที่ถูกเปิดเผยโดย คอมเบทเตและเฮิร์สเตากา $[2]$ โมดาฟิ (Moudafi) $[5]$ วิทท์แมน (Wittmann) $[6]$ และทาดา (Tada) และทาคาฮาชิ $[7]$

ในบทความนี้มีแรงจูงใจและบัลดาลใจจาก คอมเบทเต และ เฮิร์สเตากา $[2]$และทาคาฮาชิและทาคาฮาชิ $[4]$ ยองฮองเหยา (Yonghong Yao) และคณะ ได้แนะนำกระบวนการทำซ้ำสำหรับการหาสมาชิกร่วมของเซตของผลเฉลยของปัญหาค่าสมดุล และเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายไม่จำกัดในปริภูมิฮิลเบิร์ต ได้ค้นพบทฤษฎีการลู่เข้าอย่างเข้มที่ปรับปรุง และขยายผลจากทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกันกับในเอกสารอ้างอิง $[2,4]$

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ F เป็นฟิลด์ และนิยามตัวดำเนินการ $+: X \times X \to X$ และตัวดำเนินการคูณด้วยสเกลาร์ $\square : \mathrm{F} \times X \to X$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(V1) $x + y = y + x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

(V2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(V3) มีเวกเตอร์ $0 \in X$ ซึ่ง $x + 0 = x$ สำหรับทุก $x \in X$

(V4) สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $x \in X$ มีเวกเตอร์ $-x$ ซึ่ง $x + (-x) = 0$

(V5) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ และ $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และทุก $\alpha \cdot \beta \in \mathrm{F}$

(V6) $1 \cdot x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

เรียกระบบ $(X, +, \square)$ ว่า ปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ F (vector space over field F)

ตัวอย่าง 2.1 ปริภูมิ $\square^N$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ โดยที่การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์นิยามโดย

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$$

และ $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N)$ เมื่อ $\alpha \in \mathrm{F}, x = (x_1, \dots, x_N)$ และ $y = (y_1, \dots, y_N)$

ตัวอย่าง 2.2 ปริภูมิ $C[a,b]$ เป็นปริภูมเวกเตอร์ โดยการดำเนินการสำหรับแต่ละ $t \in [a,b]$ นิยามดังนี้

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

และ $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$ เมื่อ $\alpha \in \mathrm{F}$ และ $f, g \in C[a,b]$

ตัวอย่าง 2.3 ปริภูมิ ℓ^p เมื่อ $1 \le p \le \infty$ และปริภูมิ ℓ^∞ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ โดยการดำเนินการนิยามดังนี้

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

และ $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2 \dots)$ เมื่อ $\alpha \in \mathrm{F}, x = (x_1, x_2, \dots)$ และ $y = (y_1, y_2, \dots)$

บทนิยาม 2.2 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และให้ $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(N1) $\|x\| \geq 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(N2) $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

(N3) $\|c \cdot x\| = |c|\|x\|$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $c \in \mathrm{F}$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม 2.3 ลำดับ $\{x_n\}$ ในปริภูมินอร์ม X จะเป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) ถ้ามี $x \in X$ ซึ่ง $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$ และเขียนแทนด้วย $x_n \to x$ ลำดับ $\{x_n\}$ ในปริภูมินอร์ม X จะเป็นลำดับโคชี (Cauchy sequence) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ สำหรับทุก $m, n > n_0$

บทนิยาม 2.4 ปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ จะถูกเรียกว่า ปริภูมิบานาค (Banach space) ถ้า X เป็นปริภูมินอร์มบริบูรณ์ (complete normed space)

ตัวอย่าง 2.4 ปริภูมิ $\mathbb{R}^N$ และ $\mathbb{C}^N$ เป็นปริภูมิบานาคภายใต้นอร์มที่นิยามโดย

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{สำหรับทุก } x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \text{ ใน } \mathbb{R}^N \text{ หรือ } \mathbb{C}^N$$

ตัวอย่าง 2.5 ปริภูมิ ℓ^p เมื่อ $1 \leq p < \infty$ เป็นปริภูมิบานาคภายใต้นอร์มที่นิยามโดย

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{สำหรับทุก } x = (x_1, x_2, \ldots) \text{ ใน } \ell^p$$

ตัวอย่าง 2.6 ปริภูมิ ℓ^∞ เป็นปริภูมิบานาคภายใต้นอร์มที่นิยามโดย

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \qquad \text{สำหรับทุก } x = (x_1, x_2, \ldots) \text{ ใน } \ell^\infty$$

บทนิยาม 2.5 ให้ X เป็นปริภูมิเมตริก และ $M \subseteq X$ จะกล่าวว่า M เป็นเซตกระชับ (compact set) ถ้าทุกลำดับใน M มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าใน M และจะเรียก X ว่า ปริภูมิกระชับ (compact space) ถ้า X เป็นเซตกระชับ

ตัวอย่าง 2.7

(1) ทุกเซตย่อยซึ่งเป็นเซตจำกัดของปริภูมิเมตริกเป็นเซตกระชับ

(2) ช่วงปิด $[a,b]$ เป็นเซตกระชับใน □

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ X เป็นปริภูมินอร์มที่มีมิติจำกัด และให้ $M \subseteq X$ จะได้ว่า M เป็นเซตกระชับ ก็ต่อเมื่อ M เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต

บทนิยาม 2.6 กำหนดให้ $T : D(T) \to R(T)$ เป็นการส่ง เมื่อ $D(T)$ คือ โดเมนของ T และ $R(T)$ คือ เรนจ์ของ T จะกล่าวว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator) ก็ต่อเมื่อ

(1) $D(T)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

(2) $T(x+y) = Tx + Ty$ และ $T(\alpha x) = \alpha Tx$ ทุก $x, y \in D(T)$ และทุกสเกลาร์ α

ตัวอย่าง 2.8

1. ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ (identity operator) บนปริภูมิเวกเตอร์ X คือ การส่ง $I_X : X \to X$ ซึ่งนิยามโดย $I_X(x) = x$ สำหรับทุก $x \in X$

2. ตัวดำเนินการศูนย์ (zero operator) คือ การส่ง $T : X \to Y$ ซึ่งนิยามโดย $Tx = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

3. ให้ $X = \{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 : n \in □\}$ และนิยาม $Tx(t) = x'(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ และ $x \in X$ จะได้ว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน X

4. ให้ $T : C[a,b] \to C[a,b]$ นิยามโดย

$$Tx(t) = \int_a^t x(s)\,ds$$

เมื่อ $t \in [a,b]$ จะได้ว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

บทนิยาม 2.6 ให้ X และ Y เป็นปริภูมินอร์ม และให้ $T : D(T) \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะกล่าวว่า T เป็นตัวดำเนินการที่มีขอบเขต (bounded operator) ถ้ามี $c > 0$ ซึ่ง

$$\|Tx\| \le c\|x\| \qquad \text{สำหรับทุก } x \in D(T)$$

บทนิยาม 2.7 กำหนดให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และให้ $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathrm{F}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(IP1) $\langle x, x \rangle \ge 0$ และ $\langle x, x \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

(IP2) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(IP3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

(IP4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และทุกจำนวนสเกลาร์ α

เรียก $\langle x, y\rangle$ ว่า ผลคูณภายในของเวกเตอร์ x กับ y และเรียกคู่อันดับ $\left(X, \langle \cdot, \cdot\rangle\right)$ ว่า ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space)

หมายเหตุ 3.1.1

1. ถ้า X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ค่าจริง แล้ว $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

2. จากบทนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า

2.1 $\langle \alpha x, \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

2.2 $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$

2.3 $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และทุกจำนวนสเกลาร์ α, β

บทตั้ง 2.1 อสมการโคชี–ชวาร์ส (Cauchy–Schwarz inequality)

ถ้า X เป็นปริภูมิผลคูณภายในแล้ว

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\| \qquad \text{สำหรับทุก } x, y \in X$$

นอกจากนี้ $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ ก็ต่อเมื่อ $\{x, y\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน แล้วฟังก์ชัน $\|\cdot\|$ ที่นิยามโดย $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ เมื่อ $x \in X$ เป็นนอร์มบนปริภูมิ X

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน จะได้ว่า ถ้า $x_n \to x$ และ $y_n \to y$ แล้ว $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

บทตั้ง 2.2 ถ้า X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน แล้ว

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad \text{สำหรับทุก } x, y \in X$$

บทนิยาม 2.8 ถ้า $\left(X, \langle \cdot, \cdot\rangle\right)$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในบริบูรณ์ แล้วเรียก X ว่า ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space)

ตัวอย่าง 2.9

1. $\left(\square^{N},\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต เมื่อ

$\langle x,y\rangle = x_1y_1+\ldots+x_Ny_N$

สำหรับทุก $x=\left(x_1,\ldots,x_N\right)$ และ $y=\left(y_1,\ldots,y_N\right)$ ใน $\square^{N}$

2. $\left(\square^{N},\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต เมื่อ

$\langle x,y\rangle = x_1\overline{y}_1+\ldots+x_N\overline{y}_N$

สำหรับทุก $x=\left(x_1,\ldots,x_N\right)$ และ $y=\left(y_1,\ldots,y_N\right)$ ใน $\square^{N}$

3. $\left(L^2\left[a,b\right],\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต เมื่อ

$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$

สำหรับทุก $x,y\in L^2\left[a,b\right]$

4. $\left(\ell^2,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต เมื่อ

$\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y}_i$

สำหรับทุก $x=\left(x_1,x_2,\ldots\right)$ และ $y=\left(y_1,y_2,\ldots\right)$ ใน ℓ^2

บทนิยาม 2.9 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ โดยที่ $M\subseteq X$ จะกล่าวว่า M เป็นเซตคอนเวกซ์ (convex set) ก็ต่อเมื่อ $tx+\left(1-t\right)y\in M$ สำหรับทุก $x,y\in M$ และทุก $t\in\left(0,1\right)$

ตัวอย่าง 2.10

1. ทุกปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ X เป็นเซตคอนเวกซ์
2. $\overline{B}\left(x;r\right)=\left\{x:\|x\|\le r\right\}$ เป็นเซตคอนเวกซ์
3. $\left[0,1\right]^N=\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\times\ldots\times\left[0,1\right]$ เป็นเซตคอนเวกซ์ใน $\square^{N}$

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ I เป็นเซตดรรชนี และถ้า $\left\{C_i\right\}_{i\in I}$ เป็นวงศ์ของเซตคอนเวกซ์ในปริภูมิเวกเตอร์ X แล้ว $\bigcap\limits_{i\in I}C_i$ เป็นเซตคอนเวกซ์ใน X

บทนิยาม 2.10 ให้ Y เป็นปริภูมิย่อยปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และนิยามการส่ง $P:H\to Y$ โดย $Px=y$ เมื่อ $x\in H$ เราเรียกการส่ง P ว่า ภาพฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) หรือภาพฉายเชิงเมตริก (metric projection) จาก H ไปทั่วถึง Y

บทตั้ง 2.3 ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยมี C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ของ H และให้ $x \in H$ และ $y = Px \in C$ จะได้ว่า

$\|x-y\| = d(x,C)$ ก็ต่อเมื่อ $\langle x-y, y-z\rangle \geq 0$ สำหรับทุก $z \in C$

กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่ไม่ใช่เซตว่างของ H และให้ $P_C : H \to C$ และถ้าแต่ละ $x \in H$

$$\|x - P_C x\| \leq \|x-y\| \quad \text{สำหรับทุก } y \in C$$

เราเรียก P_C ว่า ภาพฉายเชิงเมตริก (metric projection) ของ H ไปยัง C และนอกจากนี้จะได้ว่า P_C เป็นการส่งแบบไม่ขยาย

บทตั้ง 2.4 ให้ C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย จะได้ว่า $I - T$ เป็นการส่งแบบกึ่งปิดที่ 0 นั่นคือ ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนไปยัง $x \in C$ และ $x_n - Tx_n \to 0$ แล้ว $x = Tx$

บทตั้ง 2.5 ให้ $\{x_n\}$ และ $\{z_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิบานาค E และให้ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับใน $[0,1]$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$$

สมมติว่า $x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n$ สำหรับทุก $n \geq 0$ และ

$\limsup_{n\to\infty}\left(\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|\right) \leq 0$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\|z_n - x_n\| = 0$

บทตั้ง 2.6 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริงบวก โดยที่ $a_{n+1} \leq (1-\gamma_n)a_n + \gamma_n\delta_n$ สำหรับทุก $n \geq 0$ เมื่อ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0,1)$ และ $\{\delta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n = \infty$

(2) $\limsup_{n\to\infty}\delta_n \leq 0$ หรือ $\sum_{n=0}^{\infty}|\delta_n\gamma_n| < \infty$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ทฤษฎีบท 2.5 ทฤษฎีบทการหดตัวของบานาค (Banach’s contraction theorem)

ถ้า X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $f : X \to X$ เป็นการส่งแบบหดตัว แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวใน X

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริงที่ประกอบด้วยผลคูณภายในเป็น $\langle \cdot,\cdot \rangle$ และนอร์ม $\|\cdot\|$ ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ H แล้วสำหรับทุกจุด $x \in H$ จะมีจุดที่ใกล้ที่สุด

เพียงจุดเดียวใน C เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P_C(x)$ ที่ซึ่ง $\|x-P_C(x)\|\le\|x-y\|$ สำหรับทุก $y\in C$ จะเรียก P_C ว่าภาพฉายระยะทางของ H ไปยัง C เป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไปว่าในปริภูมิฮิลเบิร์ต P_C คือการส่งแบบไม่ขยาย นอกจากนี้สำหรับ $x\in H$ และ $x^*\in C$ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$x^*=P_C(x)\leftrightarrow\langle x-x^*,x^*-y\rangle\ge 0 \qquad \text{สำหรับทุก } y\in C \tag{2.1}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้น การส่ง $T:C\to H$ จะเรียกว่าการส่งแบบไม่ขยายถ้า

$$\|Tx-Ty\|\le\|x-y\| \qquad \text{สำหรับทุก } x,y\in C$$

และกำหนดเซตของจุดตรึงของ T โดย $F(T)$ ซึ่งเป็นที่รู้กันดีว่า ถ้า C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่มีขอบเขตและ $T:C\to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายแล้ว $F(T)\ne\varnothing$ สำหรับตัวอย่างดูได้จากเอกสารอ้างอิง[8] การส่ง $f:H\to H$ เราจะเรียกว่าการส่งแบบหดตัว ถ้ามีค่าคงที่ $\alpha\in(0,1)$ ซึ่งทำให้

$$\|f(x)-f(y)\|\le\alpha\|x-y\| \qquad \text{สำหรับทุก } x,y\in H$$

สำหรับฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุล $h:C\times C\to\mathbb{R}$ จะเรียก h ว่าสอดคล้องกับเงื่อนไข (A) ถ้า h สอดคล้องกับเงื่อนไข 3 ข้อ ดังต่อไปนี้

(i) h เป็นลำดับทางเดียว $(monotone)$ นั่นคือ $h(x,y)+h(y,x)\le 0$ สำหรับทุก $x,y\in C$

(ii) สำหรับแต่ละ $x,y,z\in C,\ \lim_{t\to 0}h(tz+(1-t)x,y)\le h(x,y)$

(iii) สำหรับแต่ละ $x\in C,\ \ y\mapsto h(x,y)$ เป็นเซตนูน $(convex)$ และฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง $(lower\ semicontinuous)$

ถ้าฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุล $h:C\times C\to R$ สอดคล้องกับเงื่อนไข (A) จะได้ข้อความจริง 2 ข้อสำคัญดังต่อไปนี้ ซึ่งสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมจากเอกสารอ้างอิง[1,2]

บทตั้ง 2.7 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ H และให้ $h:C\times C\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุล สอดคล้องกับเงื่อนไข (A) ให้ $r>0$ และ $x\in H$ แล้วจะมี $y\in C$ ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการดังต่อไปนี้

$$h(y,z)+\frac{1}{r}\langle z-y,y-x\rangle\ge 0 \qquad \text{สำหรับทุก } z\in C \tag{2.2}$$

บทตั้ง 2.8 สมมติว่า h สอดคล้องกับสมมติฐานเดียวกันกับบทตั้ง 2.1 สำหรับ $r>0$ และ $x \in H$ กำหนดการส่ง $S_r : H \to C$ ดังต่อไปนี้

$$S_r(x)=\left\{ y \in C : h(y,z)+\frac{1}{r}\langle z-y, y-x\rangle \geq 0, \forall z \in C \right\} \text{ สำหรับทุก } y \in H \qquad (2.3)$$

แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) S_r เป็นค่าเดี่ยวและ S_r เป็น การส่งไม่ขยายแน่นหนา (firmly nonexpansive) สำหรับทุก $x, y \in H$ ที่ซึ่ง

$$\|S_r x - S_r y\|^2 \leq \langle S_r x - S_r y, x-y\rangle \qquad (2.4)$$

(2) $F(S_r)=SEP(h)$ และ $SEP(h)$ เป็นเซตปิดและเซตนูน

เราจึงจำเป็นต้องมีบทแทรกดังต่อไปนี้ ใช้สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีหลัก

บทที่ 3

ผลลัพธ์หลัก

ในส่วนนี้ อันดับแรก ยองฮองเยา (Yonghong Yao) และคณะ ยอง–เชงไลอู เจนชีเหยา (Yeong–Cheng Liou, Jen–ChihYao) แนะนำกระบวนการทำซ้ำ เขาได้พิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าอย่างเข้มสำหรับกระบวนการทำซ้ำ ที่เฉพาะเจาะจงมากขึ้น ให้ $T_1, T_2, \ldots$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายจาก C ไปยัง C และให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ เป็นจำนวนจริง ที่ซึ่ง $0 \le \lambda_i \le 1$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ กำหนดการส่ง W_n ของ C ไปยัง C ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
U_{n,n+1} &= I, \\
U_{n,n} &= \lambda_n T_n U_{n,n+1} + (1-\lambda_n) I, \\
U_{n,n-1} &= \lambda_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + \left(1-\lambda_{n-1}\right) I, \\
&\vdots \\
U_{n,k} &= \lambda_k T_k U_{n,k+1} + (1-\lambda_k) I, \\
&\vdots \\
U_{n,2} &= \lambda_2 T_2 U_{n,3} + (1-\lambda_2) I, \\
W_n = U_{n,1} &= \lambda_1 T_1 U_{n,2} + (1-\lambda_1) I
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

ซึ่ง การส่ง W_n เรียกว่า การส่ง W สร้างขึ้นโดย $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ และ $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1$ สามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิง$[11]$

จากนั้นยองฮองเยา และคณะยอง–เชงไลอู เจนชีเหยาได้แนะนำกระบวนการทำซ้ำต่อไปนี้ ให้ f เป็นการส่งแบบหดตัวของ H ไปยัง H พร้อมกับสัมประสิทธิ์ $\alpha \in (0,1)$ และให้ $x_0 \in H$ กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับ ที่ถูกสร้างโดยระเบียบวิธีต่อไปนี้

$$
h(y_n, x) + \frac{1}{r_n}\langle x - y_n, y_n - x_n \rangle \ge 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \in C \tag{3.2}
$$

$$
x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n y_n
$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,1)$ ที่ซึ่ง $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ และ $\{r_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน $(0,\infty)$ h เป็นฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุลและ W_n เป็นการส่ง W ที่กำหนดโดย(3.1)

ยองฮองเยาและคณะได้นำเสนอข้อสรุปที่สำคัญดังต่อไปนี้เกี่ยวกับ W_n จากเอกสารอ้างอิง $[12,13]$ ในปริภูมิฮิลเบิร์ตดังต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริง H ให้ $T_1,T_2,\ldots$ เป็นการส่งไม่ขยายของ C ไปยัง C ที่ซึ่ง $\bigcap_{i=1}^{\infty}F(T_i)\neq\varnothing$ และให้ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ เป็นจำนวนจริง ที่ซึ่ง $0<\lambda_i\leq b<1$ สำหรับทุก $i\in\mathbb{N}$ แล้วสำหรับทุก $x\in C$ และ $k\in N$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}U_{n,k}x$ หาค่าได้

ข้อสังเกต (3.2) จากบทตั้ง 3.1 เราจะได้ว่า ถ้า C มีขอบเขต แล้วสำหรับทุก $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนเต็มบวกร่วม N_0 ที่ซึ่ง สำหรับ $n>N_0$ แล้วจะได้ว่า $\|U_{n,k}x-U_k(x)\|<\varepsilon$ สำหรับทุก สามารถศึกษาได้จากบทตั้ง 3.2 ในเอกสารอ้างอิง$[13]$ ซึ่งเขาพิสูจน์ดังต่อไปนี้ ให้ $w\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$ จาก C มีขอบเขตจะมีคงที่ $M>0$ ที่ซึ่ง $\|x-w\|\leq M$ สำหรับทุก $x\in C$ กำหนดให้ $k\in N$ แล้วสำหรับทุก $x\in C$ และทุก $n\in N$ พร้อมด้วย $n\geq k$ เราจะได้ว่า $\|U_{n+1,k}x-U_{n,k}x\|\leq 2\left(\prod_{i=k}^{n+1}\lambda_i\right)$

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon>0$ แล้วจะมี $n_0\in N$ โดยที่ $n_0\geq k$ ที่ซึ่งสำหรับทุก $x\in C$ จะได้ว่า $b^{n_0-k+2}<\varepsilon\dfrac{(1-b)}{2M}$ ดังนั้นสำหรับทุก $x\in C$ และทุก m,n ที่ซึ่ง $m>n>n_0$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|U_{m,k}x-U_{n,k}x\| &\leq \sum_{j=n}^{m-1}\|U_{j+1,k}x-U_{j,k}x\| \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1}\left\{2\left(\prod_{i=k}^{j+1}\lambda_i\right)\|x-w\|\right\} \\ &\leq 2M\sum_{j=n}^{m-1}b^{j-k+2} \\ &\leq \frac{2Mb^{n-k+2}}{1-b}<\varepsilon\end{aligned} \tag{3.3}$$

ข้อสังเกต (3.3) จากบทตั้ง 3.1 กำหนดการส่ง W ของ C ไปยัง C โดย $Wx=\lim_{n\to\infty}W_nx=\lim_{n\to\infty}U_{n,1}x$ สำหรับทุก $x\in C$ ซึ่ง W เรียกว่าการส่ง W สร้างโดย $T_1,T_2,\ldots$ และ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ เราสังเกตว่าถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตใน C แล้วเราจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|Wx_n-W_nx_n\|=0 \tag{3.4}$$

จากข้อสังเกต 3.1 เราจะได้ว่า สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี n_0 ที่ซึ่ง $\|Wx - W_n x\| \le \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in \{x_n\}$ และสำหรับทุก $n \ge n_0$ ในกรณีเฉพาะได้ว่า $\|Wx_n - W_n X_n\| \le \varepsilon$ สำหรับทุก $n \ge n_0$ สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\|Wx_n - W_n x_n\| = 0$

บทตั้ง 3.4 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริง H ให้ $T_1, T_2, \ldots$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายจาก C ไปยัง C ที่ซึ่ง $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \varnothing$ และให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ เป็นจำนวนจริงที่ซึ่ง $0 < \lambda_i \le b < 1$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ แล้วจะได้ว่า $F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริง H ให้ $h: C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุลที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A) และให้ $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ เป็นวงศ์ไม่จำกัดของการส่งไม่ขยายจาก C ไปยัง C ที่ซึ่ง $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h) \neq \varnothing$ สมมติ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,1)$ ที่ซึ่ง $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ และ $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ สมมติเงื่อนไขดังต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$

(ii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$

(iii) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} (r_{n+1} - r_n) = 0$

ให้ f เป็นการส่งแบบหดตัวจาก H ไปยัง H และกำหนดให้ $x_0 \in H$ แล้วจะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ที่ถูกสร้างโดยกระบวนการทำซ้ำ (3.2) ลู่เข้าอย่างเข้มไปยัง $x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)$ เมื่อ $x^* = P_{\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)} f(x^*)$

พิสูจน์

ให้ $Q = P_{\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)}$ กำหนดให้ f เป็นการส่งแบบหดตัวกับสัมประสิทธิ์ $\alpha \in (0,1)$

ถ้า $\|Qf(x) - Qf(y)\| \le \|f(x) - f(y)\| \le \alpha \|x - y\|$ สำหรับทุก $x, y \in H$

ฉะนั้น Qf เป็นการหดตัวของ H ไปยัง H ซึ่งจะได้ว่ามีสมาชิก x^* เพียงหนึ่งเดียวใน H ที่ซึ่ง $x^* = Qf(x^*)$ ในขณะเดียวกัน กำหนดให้ $x^* \in C$

ให้ $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)$ จากบทนิยามของ S_r กำหนดให้ $y_n = S_{r_n} x_n$ ดังต่อไปนี้ที่ $\|y_n - p\| = \|S_{r_n} x_n - S_{r_n} p\| \le \|x_n - p\|$ ต่อไป จะพิสูจน์ว่า $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ มีขอบเขต จาก (3.1) และ (3.2) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\le \alpha_n \| f(x_n) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|W_n y_n - p\| \\
&\le \alpha_n (\| f(x_n) - f(p)\| + \| f(p) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|y_n - p\| \\
&\le \alpha_n (\alpha \|x_n - p\| + \| f(p) - p\|) + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|y_n - p\| \\
&\le \alpha_n (\alpha \|x_n - p\| + \| f(p) - p\|) + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|x_n - p\| \\
&\le \alpha_n (\alpha \|x_n - p\| + \| f(p) - p\|) + (\beta_n + \gamma_n) \|x_n - p\| \\
&\le \alpha_n (\alpha \|x_n - p\| + \| f(p) - p\|) + (1 + \alpha_n) \|x_n - p\| \\
&\le \alpha_n \alpha \|x_n - p\| + \alpha_n \| f(p) - p\| + (1 + \alpha_n) \|x_n - p\| \\
&\le \alpha_n \alpha \|x_n - p\| + \alpha_n \| f(p) - p\| + (1 + \alpha_n) \|x_n - p\| \\
&= \left[1 - \alpha_n \left(1 - \alpha\right)\right] \|x_n - p\| + \alpha_n \| f(p) - p\| \\
&= \left[1 - \alpha_n \left(1 - \alpha\right)\right] \|x_n - p\| + \frac{(1-\alpha) \| f(p) - p\|}{(1-\alpha)} \\
&= \left[1 - \alpha_n \left(1 - \alpha\right)\right] \|x_n - p\| + \frac{\alpha_n (1-\alpha) \| f(p) - p\|}{(1-\alpha)} \\
&\le \max \left\{ \|x_0 - p\| + \frac{1}{1-\alpha} \| f(p) - p\| \right\}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ มีขอบเขต เช่นเดียวกับ $\{y_n\}$ $\{W_n y_n\}$ และ $\{f(x_n)\}$ มีขอบเขต

ใช้ M เป็นค่าคงที่ ให้ $x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) z_n$ สำหรับทุก $n \ge 0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} - z_n &= \frac{x_{n+2} - \beta_{n+1} x_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - \beta_n x_n}{1 - \beta_n} \\
&= \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left(f(x_{n+1}) - f(x_n) \right) + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right) f(x_n) \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} (W_{n+1} y_{n+1} - W_n y_n) + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 - \beta_n} \right) W_n y_n
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
\|z_{n+1} - z_n\| &\le \frac{\alpha \alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|x_{n+1} - x_n\| + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right) \| f(x_n)\| \\
&\quad + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 - \beta_n} \right) \|W_n y_n\| + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|W_{n+1} y_{n+1} - W_n y_n\|
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

เนื่องจาก T_i และ $U_{n,i}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย จาก (3.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|W_{n+1}y_n - W_n y_n\| &= \|\lambda_1 T_1 U_{n+1,2} - \lambda_1 T_1 U_{n,2} y_n\| \\ &\le \lambda_1 \|U_{n+1,2} y_n - U_{n,2} y_n\| \\ &\le \lambda_1 \lambda_2 \|U_{n+1,3} y_n - U_{n,3} y_n\| \\ &\le . \quad . \quad . \\ &\le \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \|U_{n+1,n+1} y_n - U_{n,n+1} y_n\| \\ &\le M \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned} \tag{3.8}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\|W_{n+1}y_n - W_n y_n\| &= \|W_{n+1}y_{n+1} - W_{n+1}y_n\| + \|W_{n+1}y_{n+1} - W_n y_n\| \\ &\le \|y_{n+1} - y_n\| + M \prod_{i=1}^{n} \lambda_1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

แทน (3.9) ลงใน (3.7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - z_n\| &\le \frac{\alpha \alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} \|x_{n+1} - x_n\| + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1-\beta_n} \right) \|f(x_n)\| \\ &+ \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1-\beta_n} \right) \|W_n y_n\| + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} \right) \|y_{n+1} - y_n\| + \frac{M\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned} \tag{3.10}$$

จาก $y_n = S_{r_n} x_n$ และ $y_{n+1} = S_{r_n} x_{n+1}$ จะได้ว่า

$$h(y_n, x) + \frac{1}{r_n} \langle x - y_n, y_n - x_n \rangle \ge 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \in C \tag{3.11}$$

$$h(y_{n+1}, x) + \frac{1}{r_{n+1}} \langle x - y_{n+1}, y_{n+1} - x_{n+1} \rangle \ge 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \in C \tag{3.12}$$

แทน $x = y_{n+1}$ ใน (3.11) และ $x = y_n$ ใน (3.12) จะได้ว่า

$$h(y_n, y_{n+1}) + \frac{1}{r_n} \langle y_{n+1} - y_n, y_n - x_{n+1} \rangle \ge 0 \tag{3.13}$$

$$h(y_{n+1}, y_n) + \frac{1}{r_{n+1}} \langle y_n - y_{n+1}, y_{n+1} - x_{n+1} \rangle \ge 0 \tag{3.14}$$

จาก h เป็นลำดับทางเดียว จะได้ว่า

$$h(y_n, y_{n+1}) + h(y_{n+1}, y_n) \le 0 \tag{3.15}$$

ฉะนั้นจาก (3.13) สามารถสรุปได้ว่า

$$\left\langle y_{n+1}, y_n, \frac{y_n - x_n}{r_n} - \frac{y_n - x_{n+1}}{r_{n+1}} \right\rangle \ge 0 \tag{3.16}$$

เพราะฉะนั้น

$$\left\langle y_{n+1} - y_n, y_n - y_{n+1} + y_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}\left(y_{n+1} - x_{n+1}\right) \right\rangle \ge 0 \tag{3.17}$$

เมื่อ $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ สมมติ τ เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ซึ่ง $r_n > \tau > 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\|^2 &\le \left\langle y_{n+1} - y_n, x_{n+1} - x_n + \left(1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right)\left(y_{n+1} - x_{n+1}\right) \right\rangle \\ &\le \|y_{n+1} - y_n\| \left\{ \|x_{n+1} - x_n\| + \left|1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right| \|y_{n+1} - x_{n+1}\| \right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

เพราะฉะนั้น

$$\|y_{n+1} - y_n\| \le \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{M}{\tau}|r_{n+1} - r_n| \tag{3.19}$$

แทน (3.19) ใน (3.10) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z_n\| \le{}& \frac{\alpha\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\|x_{n+1} - x_n\| + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\right)\|f(x_n)\| + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1-\beta_n}\right) \\ & \|W_n y_n\| + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\right)\|x_{n+1} - x_n\| + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\right) \times \frac{M}{\tau}|r_{n+1} - r_n| + \frac{M}{1-\beta_{n+1}}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \\ \le{}& \|x_{n+1} - x_n\| + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\right)\|f(x_n)\| + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1-\beta_n}\right)\|W_n y_n\| \\ & + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\right) \times \frac{M}{\tau}|r_{n+1} - r_n| + \frac{M}{1-\beta_{n+1}}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \end{aligned} \tag{3.20}$$

พร้อมด้วย $\alpha_n \to 0$ และ $r_{n+1} - r_n \to 0$ บ่งบอกว่า

$$\lim_{n\to\infty} Sup\left(\|z_{n+1} - z_n\|\right) - \left(\|x_{n+1} - x_n\|\right) \le 0$$

ฉะนั้นโดย บทตั้ง 2.3 ได้ว่า $\|z_{n+1}-z_n\| \to 0$ ที่ $n \to \infty$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x_{n+1}-x_n\|\right)=\lim_{n\to\infty}(1-\beta_n)\|z_n-x_n\|=0 \tag{3.21}$$

จาก (3.19) และ $\lim_{n\to\infty}(r_{n+1}-r_n)=0$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\{y_{n+1}-y_n\}=0$

เมื่อ $x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+\beta_n x_n+\gamma_n W_n y_n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|x_n-W_ny_n\| &\le \|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-W_ny_n\| \\ &\le \|x_n-x_{n+1}\|+\alpha_n\|f(x_n)-W_ny_n\|+\beta_n\|x_n-W_ny_n\|\end{aligned} \tag{3.22}$$

นั่นคือ

$$\|x_n-W_ny_n\| \le \frac{1}{1-\beta_n}\|x_n-x_{n+1}\|+\frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\|f(x_n)-W_ny_n\| \tag{3.23}$$

ฉะนั้น

$\lim_{n\to\infty}\|x_n-W_ny_n\|=0$ สำหรับ $p\in\cap_{i=1}^{\infty}F(Ti)\cap SEP(h)$ จาก S_r เป็นการส่งไม่ขยายหนาแน่น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|^2 &= \left\|S_{r_n}x_n-S_{r_n}p\right\|^2 \\ &\le \left\langle S_{r_n}x_n-S_{r_n}p, x_n-p\right\rangle \\ &= \left\langle y_n-p, x_n-p\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\|y_n-p\|^2+\|x_n-p\|^2-\|x_n-y_n\|^2\right)\end{aligned} \tag{3.24}$$

เพราะฉะนั้น

$$\|y_n-p\|^2 \le \|x_n-p\|^2-\|x_n-y_n\|^2 \tag{3.25}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2 &\le \alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+\beta_n\|x_n-p\|^2+\gamma_n\|W_ny_n-p\|^2 \\ &\le \alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+\beta_n\|x_n-p\|^2+\gamma_n\|y_n-p\|^2 \\ &\le \alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+\beta_n\|x_n-p\|^2+\gamma_n(\|x_n-p\|^2-\|x_n-y_n\|^2) \\ &\le \alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+\|x_n-p\|^2-\gamma_n\|x_n-y_n\|^2\end{aligned} \tag{3.26}$$

จากนั้น

$$\gamma_n \|x_n - y_n\|^2 \le \alpha_n \|f(x_n) - p\|^2 + (\|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|)$$
$$(\|x_n - p\| - \|x_{n+1} - p\|) \tag{3.27}$$
$$\le \alpha_n \|f(x_n) - p\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|(\|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|)$$

จาก $\liminf\limits_{n\to\infty} \gamma_n > 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0 \tag{3.28}$$

จาก $\|W_n y_n - y_n\| \le \|W_n y_n - x_n\| + \|x_n - y_n\|$ จะได้ว่า $\|W_n y_n - y_n\| \to 0$ ในขณะเดียวกัน

จะได้ว่า

$$\|W_n y_n - y_n\| \le \|W y_n - W_n y_n\| + \|W_n y_n - y_n\| \tag{3.29}$$

ซึ่งจาก (3.29) และ บทตั้ง 3.2 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \|W_n y_n - y_n\| = 0$ ต่อไปจะแสดงว่า

$$\limsup_{n\to\infty} \left\langle f\left(x^*\right) - x^*, x_n - x^* \right\rangle \le 0 \tag{3.30}$$

ซึ่ง $x^* = P_{F(W)\cap SEP(h)} f\left(x^*\right)$ ลำดับแรกสามารถเลือก $\left\{y_{n_j}\right\}$ ของ $\{y_n\}$ ที่ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle f\left(x^*\right) - x^*, y_{n_j} - x^* \right\rangle = \limsup_{n\to\infty} \left\langle f\left(x^*\right) - x^*, y_n - x^* \right\rangle \tag{3.31}$$

เมื่อ $\{y_n\}$ มีขอบเขต $\left\{y_{n_j}\right\}$ เป็นลำดับใดๆของ $\{y_n\}$ ที่ลู่เข้าอย่างอ่อน ไปยัง w สมมติว่า $y_{n_j} \to w$ อย่างอ่อน จาก $\|W_n y_n - y_n\| \to 0$ ซึ่งทราบว่า $W y_{n_j} \to w$ อย่างอ่อน ตอนนี้จะแสดงว่า $w \in SEP(h)$

โดย $y_n = S_{r_n} x_n$ จะมี $h(y_n, x) + \dfrac{1}{r_n}\langle x - y_n, y_n - x_n\rangle \ge 0$ สำหรับทุกๆ $x \in C$ จากลำดับทางเดียวของ h

จะมี $\dfrac{1}{r_n}\langle x - y_n, y_n - x_n\rangle \ge -h(y_n, x_n) \ge h\left(x, y_n\right)$ และ เพราะฉะนั้น

$$\left\langle x - y_{n_j}, \frac{y_{n_j} - x_{n_j}}{r_{n_j}} \right\rangle \ge h\left(x - y_{n_j}\right) \tag{3.32}$$

เมื่อ $\dfrac{(y_{n_j} - x_{n_j})}{r_{n_j}} \to 0$ และ $y_{n_j} \to w$ อย่างเข้ม จาก $h(x, y)$ เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่างบนลำดับที่สอง นั่นคือตัวแปร y จะได้ว่า $h(x, w) \le 0$ สำหรับทุก $x \in C$ สำหรับ t โดย

$0 \le t \le 1$ และ $x \in C$ ให้ $x_t = tx + (1-t)w$ เมื่อ $x \in C$ และ $w \in C$ จะได้ว่า $x_t \in C$ และเพราะฉะนั้น $h(x_t, w) \le 0$ ดังนั้นจาก $h(x, y)$ เป็นฟังก์ชันนูนค่าสมดุล บนลำดับที่สองตัวแปร y จะได้ว่า

$$0 = h(x_t, x) \le th(x_t, x) + (1-t)h(x_t, w) \le th(x_t, x) \tag{3.33}$$

ดังนั้น $h(x_t, x) \ge 0$ ฉะนั้น มี $h(w, x) \ge 0$ สำหรับทุก $x \in C$ และเพราะฉะนั้น $w \in SEP(h)$

จะแสดงว่า $w \in F(W)$ สมมติ $w \notin F(W)$ เมื่อ $y_{n_j} \to w$ อย่างเข้ม และ $w \ne Ww$ จากเงื่อนไข โอเปียล มี

$$\begin{aligned} \liminf_{j\to\infty} \left\| y_{n_j} - w \right\| &< \liminf_{j\to\infty} \left\| y_{n_j} - Ww \right\| \\ &\le \liminf_{j\to\infty} (\left\| y_{n_j} - Wy_{n_j} \right\| + \left\| Wy_{n_j} - Ww \right\|) \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \left\| y_{n_j} - w \right\| \end{aligned} \tag{3.34}$$

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $w \in \cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)$ เมื่อ $x^* = P_{\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)} f(x^*)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left\langle f(x^*) - x^*, x_n - x^* \right\rangle &= \lim_{j\to\infty} \left\langle f(x^*) - x^*, x_{n_j} - x^* \right\rangle \\ &= \lim_{j\to\infty} \left\langle f(x^*) - x^*, y_{n_j} - x^* \right\rangle \\ &= \left\langle f(x^*) - x^*, w - x^* \right\rangle \le 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

ลำดับแรกจะพิสูจน์ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มไปยัง $x^* \in \cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)$ จาก (3.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left\| x_{n+1} - x^* \right\|^2 &\le \beta_n \left\| f(x_n) - x^* \right\| + \gamma_n \left\| W_n x_n - x^* \right\| + 2\alpha_n \left\langle f(x_n) - x^*, x_{n+1} - x^* \right\rangle \\ &\le \left\{ \beta_n \left\| x_n - x^* \right\| + \gamma_n \left\| W_n x_n - x^* \right\| \right\}^2 + 2\alpha_n \left\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \right\rangle \\ &\quad + 2\alpha_n \left\langle f(x_n) - x^*, x_{n+1} - x^* \right\rangle \\ &\le \left\{ \beta_n \left\| x_n - x^* \right\| + \gamma_n \left\| y_n - x^* \right\| \right\}^2 + 2\alpha\alpha_n \left\| x_n - x^* \right\| \left\| x_{n+1} - x^* \right\| \\ &\quad + 2\alpha_n \left\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \right\rangle \\ &\le (1-\alpha_n)^2 \left\| x_n - x^* \right\|^2 + \alpha\alpha_n (\left\| x_{n+1} - x^* \right\| + \left\| x_n - x^* \right\|) \\ &\quad + 2\alpha_n \left\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \right\rangle \end{aligned} \tag{3.36}$$

ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-x^*\right\|^2 &\le \frac{\left(1-\alpha_n\right)^2+\alpha\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\left\langle f\left(x^*\right)-x^*, x_{n+1}-x^*\right\rangle \\
&= \frac{1-2\alpha_n+\alpha\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{\alpha^2{}_n}{1-\alpha\alpha_n}\left\|x_n-x^*\right\| \\
&\quad +\frac{2\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\left\langle f\left(x^*\right)-x^*, x_{n+1}-x^*\right\rangle \\
&\le \left\{1-\frac{2\left(1-\alpha\right)\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}\right\}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{2\left(1-\alpha\right)\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n} \\
&\quad \times\left\{\frac{M\alpha_n}{2\left(1-\alpha\right)}+\frac{1}{1-\alpha}\left\langle f\left(x^*\right)-x^*, x_{n+1}-x^*\right\rangle\right\} \\
&= \left(1-\varphi_n\right)\left\|x_n-x^*\right\|^2+\phi_n\varphi_n
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

เมื่อ $\varphi_n=\dfrac{2\left(1-\alpha\right)\alpha_n}{1-\alpha\alpha_n}$ และ $\phi_n=\dfrac{M\alpha_n}{2\left(1-\alpha\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\alpha\right)\left\langle f\left(x^*\right)-x^*, x_{n+1}-x^*\right\rangle}$

เห็นได้ง่ายว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n=\infty$ และ $\limsup_{n\to\infty}\phi_n\le 0$ ประยุกต์ใช้ บทตั้ง 2.4 และ(3.35) ถึง(3.37) สรุปว่า $x_n\to x^*\left(n\to\infty\right)$ ดังนั้น จาก (3.28) จะได้ว่า $y_n\to x^*\left(n\to\infty\right)$ จบการพิสูจน์

บทตั้ง 3.6 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริง H ให้ $h:C\times C\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุลที่สอดคล้องกับเงื่อนไข(A)ที่ซึ่ง $SEP(h)\ne\varnothing$ ให้ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ$\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน$(0,1)$ ที่ซึ่ง $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$ และ $\{r_n\}\subset(0,\infty)$ เป็นลำดับจำนวนจริง สมมติเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$(i)\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ และ $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$

$(ii)\ 0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\le\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$

$(iii)\liminf_{n\to\infty}r_n>0$ และ $\lim_{n\to\infty}\left|r_{n+1}-r_n\right|=0$

ให้ f เป็นการส่งแบบหดตัวจาก H ไปยัง H และกำหนดให้ $x_0\in H$ แล้วจะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ที่ถูกสร้างโดยกระบวนการทำซ้ำ

$$h\left(y_n,x\right)+\frac{1}{r_n}\left\langle x-y_n, y_n-x_n\right\rangle\ge 0 \qquad \text{หรับทุก } x\in C$$

$$x_{n+1} = \alpha_n f\left(x_n\right) + \beta_n x_n + \gamma_n y_n \tag{3.38}$$

แล้วจะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ สร้างโดย(3.38) ลู่เข้าอย่างเข้มไปยัง $x^* \in SEP(h)$ เมื่อ $x^* \in P_{SEP(h)} f\left(x^*\right)$

พิสูจน์ แทน $T_i x = x$ สำหรับทุก $x \in C$ ใน (3.1) แล้ว $W_n x = x$ สำหรับทุก $x \in C$ ดังข้อสรุปต่อไปนี้ จาก ทฤษฎีบท 3.1 ทฤษฎีนี้เป็นจริง

บทตั้ง 3.7 ให้C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริง H ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ เป็นวงศ์ไม่จำกัดของการส่งไม่ขยายจาก C ไปยัง C ที่ซึ่ง $\bigcap_{i=1}^{\infty} F\left(T_i\right) \neq \varnothing$ ให้ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน$(0,1)$ ที่ซึ่ง $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ สมมติเงื่อนไขดังต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$

(ii) $0 < \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$

ให้ f เป็นการส่งแบบหดตัวจาก H ไปยัง H และกำหนดให้ $x_0 \in H$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ถูกสร้างโดยกระบวนการทำซ้ำ

$$x_{n+1} = \alpha_n f\left(x_n\right) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n P_C x_n \tag{3.39}$$

แล้วจะได้ว่าลำดับ$\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มไปยัง $x^* = P_{\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i)} f\left(x^*\right)$

พิสูจน์ กำหนด $h(x,y) = 0$ สำหรับทุก $x, y \in C$ และ $r_n = 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้วจะมี $y_n = P_C x_n$ จาก(3.2) จะได้ว่า

$$x_{n+1} = \alpha_n f\left(x_n\right) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n P_C x_n \tag{3.40}$$

ฉะนั้นจะได้ข้อสรุปดังต่อไปนี้ จากทฤษฎีบท 3.5 จบการพิสูจน์

บทที่ 4

ตัวอย่างและผลเฉลยเชิงตัวเลข

กำหนดให้ $H=\mathbb{R}$,$C=[0,4]$,$S_{r_n}:H\to H$ $S_{r_n}(x)=\frac{1}{2}x+2$ สำหรับทุก $n\geq 0$ ให้ $T:C\to C$ กำหนดโดย $Tx=\frac{\sin(x+3.57)}{2}+3.53$ สร้าง $T_n:C\to C$ กำหนดโดย $T_nx=\frac{1}{n}x+\left(1-\frac{1}{n}\right)Tx$ สำหรับทุก $n\geq 1$ และ $T_0(x)=x$ ให้ $\alpha_n=\frac{1}{n+1}$ และ $\beta_n=\frac{n}{5n+2}$

ตารางแสดงค่าของ x_n และ *Error*

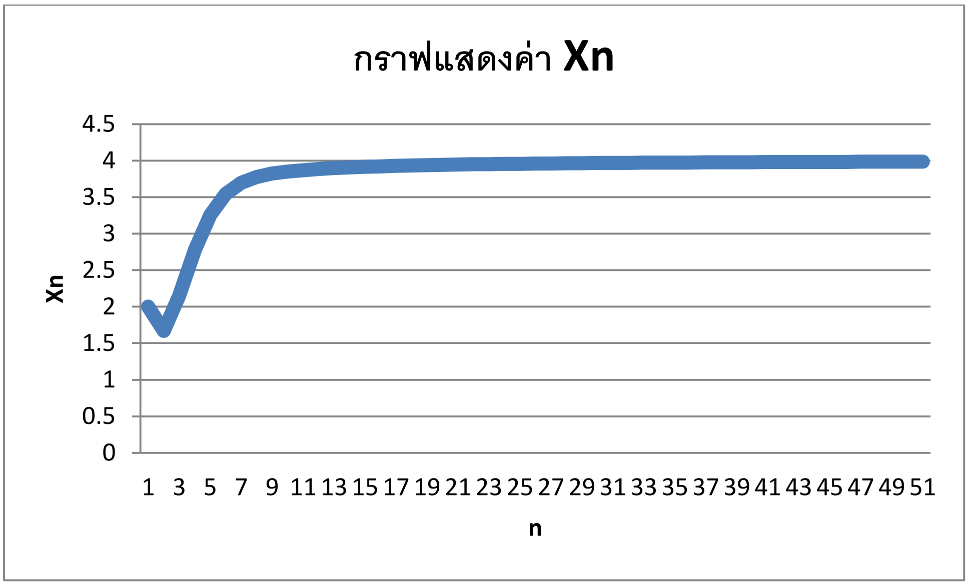
n	x_n	*Error*
0	2	0.333333333
1	1.66666667	0.484981015
2	2.15164768	0.626019405
3	2.77766709	0.47642517
4	3.25409226	0.287960892
5	3.54205315	0.15400588
6	3.69605903	0.080441096
7	3.77650012	0.04490927

8	3.82140939	0.028164231
9	3.84957363	0.01975195
10	3.86932558	0.014995928
11	3.8843215	0.011959896
12	3.8962814	0.009836013
13	3.90611741	0.008259545
14	3.91437696	0.007044442
15	3.9214214	0.006083442
16	3.92750484	0.005308599
17	3.93281344	0.00467406
18	3.9374875	0.004147564
19	3.94163507	0.003705735
20	3.9453408	0.003331244
21	3.94867204	0.003011007
22	3.95168305	0.002734987
23	3.95441804	0.002495372
24	3.95691341	0.002286012
25	3.95919942	0.002102003
26	3.96130142	0.001939403

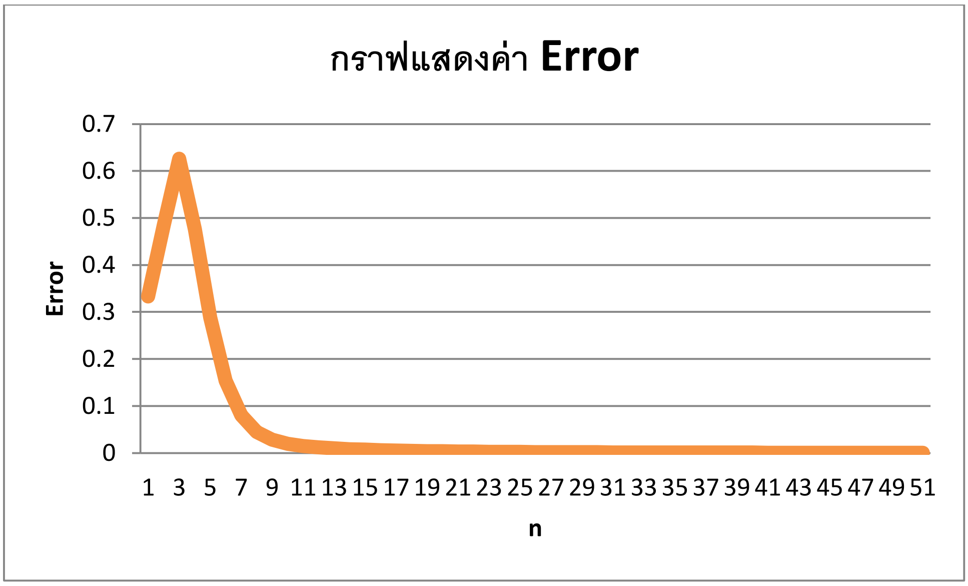
27	3.96324083	0.001795006
28	3.96503583	0.001666187
29	3.96670202	0.001550779
30	3.9682528	0.001446979
31	3.96969978	0.00135328
32	3.97105306	0.001268408
33	3.97232147	0.001191289
34	3.97351275	0.001121004
35	3.97463376	0.001056768
36	3.97569053	0.000997905
37	3.97668843	0.000943833
38	3.97763226	0.000894043
39	3.97852631	0.000848096
40	3.9793744	0.000805604
41	3.98018001	0.000766231
42	3.98094624	0.000729678
43	3.98167592	0.000695681
44	3.9823716	0.000664008
45	3.9830356	0.000634451

46	3.98367006	0.000606825
47	3.98427688	0.000580967
48	3.98485785	0.000556728
49	3.98541458	0.000533976
50	3.98594855	0.000512591

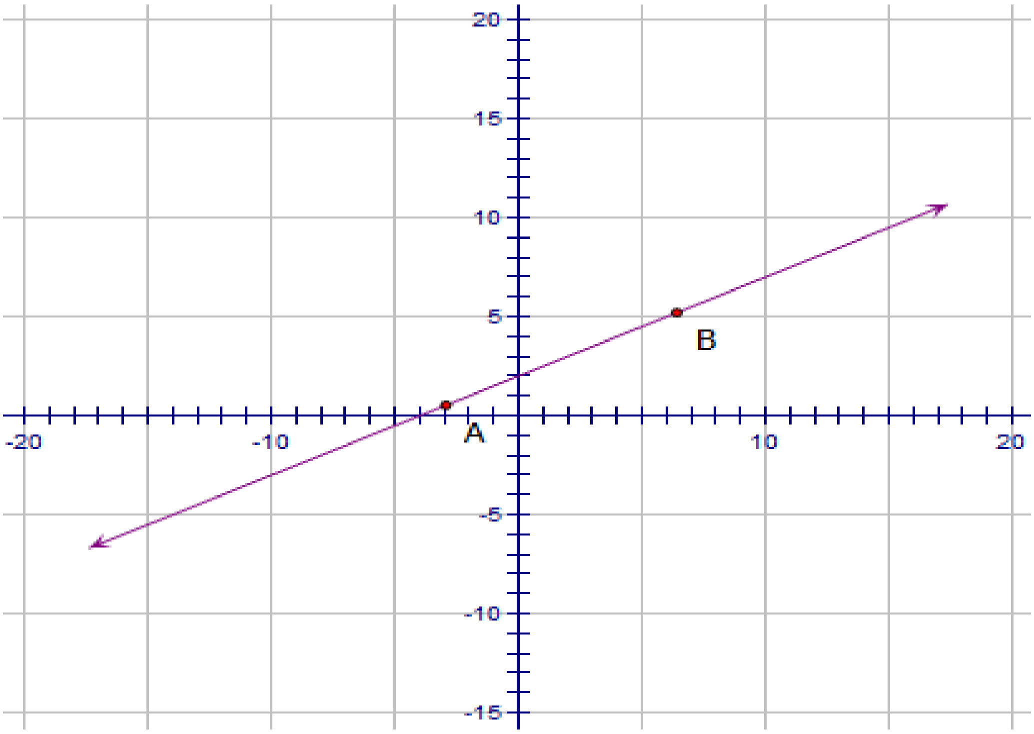
กราฟค่า x_n



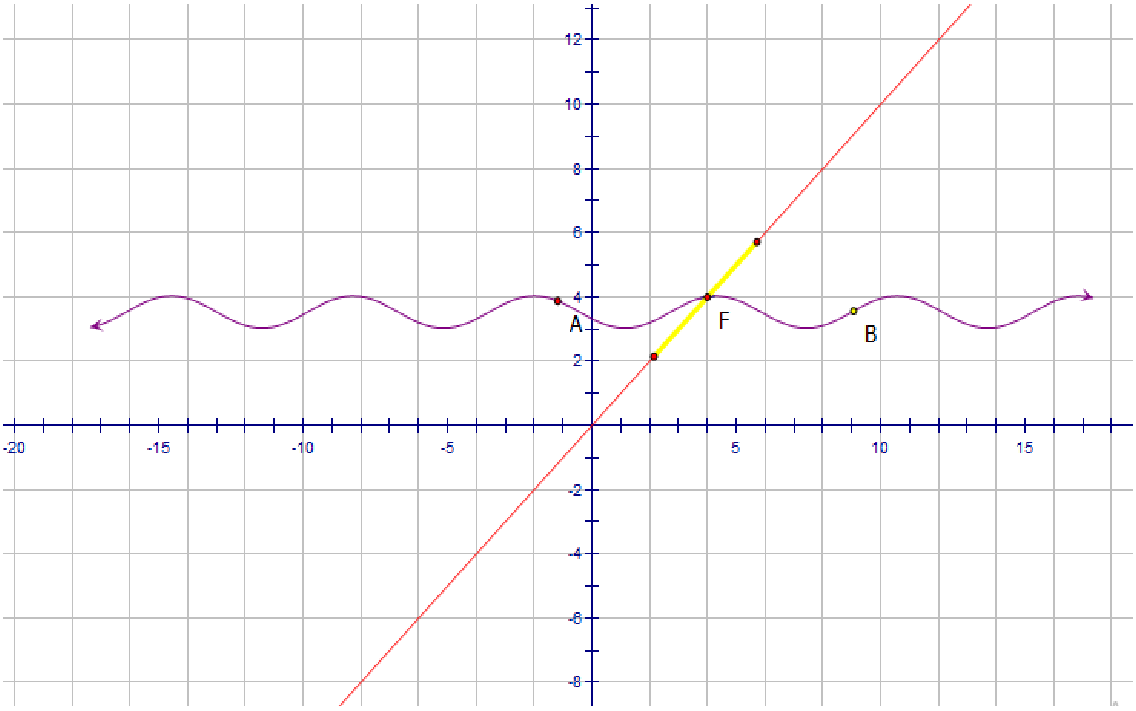
กราฟค่า $Error$



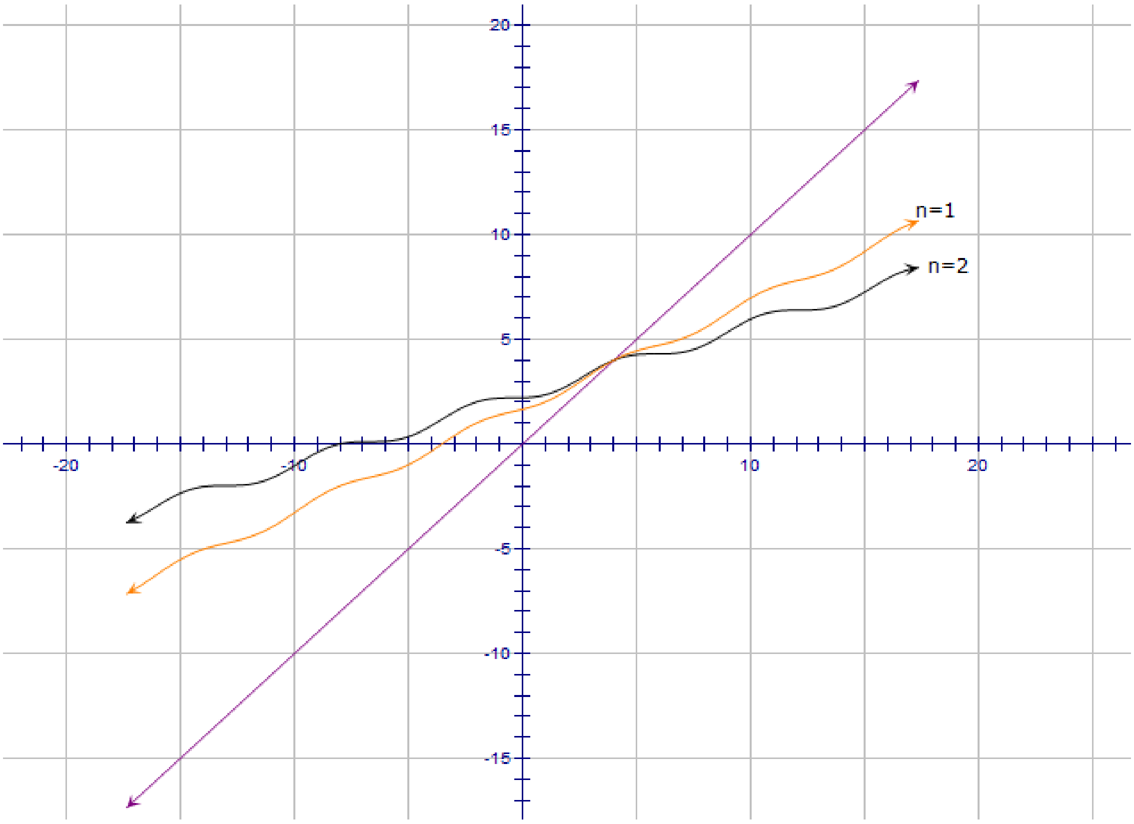
กราฟของฟังก์ชัน $S_{r_n}x = \frac{1}{2}x + 2$ สำหรับทุก $n \geq 0$



กราฟของฟังก์ชัน $Tx = \frac{\sin(x+3.57)}{2} + 3.53$



กราฟของฟังก์ชัน $T_n x = \frac{1}{n}x + (1-\frac{1}{n})Tx$ และ $T_0 x = x$



บทที่ 5

สรุปผล

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจำนวนจริง H ให้ $h: C\times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงคู่ค่าสมดุลที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A) และให้ $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ เป็นวงศ์ไม่จำกัดของการส่งไม่ขยายจาก C ไปยัง C ที่ซึ่ง $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h) \neq \varnothing$ สมมติ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,1)$ ที่ซึ่ง $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ และ $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ สมมติเงื่อนไขดังต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$

(ii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n < 1$

(iii) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} (r_{n+1} - r_n) = 0$

ให้ f เป็นการส่งแบบหดตัวจาก H ไปยัง H และกำหนดให้ $x_0 \in H$ แล้วจะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ที่ถูกสร้างโดยกระบวนการทำซ้ำ (3.2) ลู่เข้าอย่างเข้มไปยัง $x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)$ เมื่อ $x^* = P_{\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap SEP(h)} f(x^*)$

บรรณานุกรม

[1] ประสิทธิ์ ช่อลำเจียก. การวิเคราะห์ฟังก์ชันนัล, พิมพ์ครั้งที่ 1.พะเยา : 2559.

[2] มานะ ดงอานนท์. คณิตศาสตร์ 2. ปรับปรุงครั้งที่ 1. พะเยา : 2555.

[3] Blum E. and Oettli W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, The Mathematics Student, vol. 63, no. 1–4, pp. 123–145.

[4] Combettes P. L. and Hirstoaga S. A. (2005). Equilibrium programming in Hilbert spaces, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, vol. 6, no. 1, pp. 117–136.

[5] Flam S. D. and Antipin A. S. (1997). Equilibrium programming using proximal-like algorithms, Mathematical Programming, vol. 78, no. 1, pp. 29–41.

[6] Moudafi A. (2000). Viscosity approximation methods for fixed-points problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 241, no. 1, pp. 46–55.

[7] Shimoji K. and Takahashi W. (2001). Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications, Taiwanese Journal of Mathematics, vol. 5, no. 2, pp. 387– 404.

[8] Suzuki T. (2005). Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 305, no. 1, pp. 227–239.

[9] Tada A. and Takahashi W. (2007). Strong convergence theorem for an equilibrium problem and a nonexpansivemapping, inNonlinearAnalysisandConvexAnalysis, W.Takahashiand T. Tanaka, Eds., pp. 609–617, Yokohama, Yokohama, Japan.

[10] Takahashi W. (2000). Nonlinear Functional Analysis, Yokohama, Yokohama, Japan.

[11] Takahashi S. and Takahashi W. (2007) Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 331, no. 1, pp. 506–515.

[12] Takahashi W. (1997). Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska. Sectio A, vol. 51, no. 2, pp. 277–292.

[13] Takahashi W. and Shimoji K. (2000). Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, Mathematical and Computer Modelling, vol. 32, no. 11–13, pp. 1463–1471.

[14] Xu H.-K. (2004). Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 298, no. 1, pp. 279–291.

[15] Wittmann R. (1992). Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Archiv der Mathematik, vol. 58, no. 5, pp. 486–491.

ประวัติผู้ศึกษาวิจัย

ชื่อ – สกุล นางสาววาสนา คำปิงยอด

วันเดือนปีเกิด 30 มีนาคม 2537

ประวัติการศึกษา ระดับมัธยมตอนต้น โรงเรียนแม่เจดีย์วิทยาคม อำเภอเวียงป่าเป้า จังหวัดเชียงราย ปีที่จบ 2551
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนแม่เจดีย์วิทยาคม อำเภอเวียงป่าเป้า จังหวัดเชียงราย ปีที่จบ 2554

ที่อยู่ปัจจุบัน 27 ม.14 ตำบลแม่เจดีย์ อำเภอเวียงป่าเป้า จังหวัดเชียงราย 57260
เบอร์ติดต่อ 0955791316
อีเมล์ yayarjomyung@gmail.com